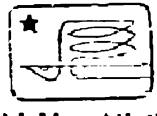
MATEMATIKOS MOKYKLA

V. LICMANAS

●

# PITAGORO TEOREMA

Versta iš trečiojo rusiško leidimo



Leidykla „Mintis"
Vilnius — 1974

Vertė N. Žičkienė

L $\frac{0222—054}{M851(10)—74}$ 132—73

© Vertimas į lietuvių kalbą, leidykla „Mintis", 1974

## RUSIŠKOJO LEIDIMO REDAKTORIAUS ŽODIS

Ši nedidelė knygelė, parašyta garsaus matematikos populiarintojo, neseniai mirusio Giotingeno universiteto profesoriaus Valterio Licmano, skiriama ne tik geometrijai, kaip atrodytų, perskaičius pavadinimą. Autorius sukaupė gana įvairią medžiagą apie geometriją, algebrą, aritmetiką. Visa ši medžiaga siejasi su žinoma Pitagoro teorema, viena puikiausių mokyklinio kurso teoremų. Tačiau autorius nenagrinėja rimtų mokslinių problemų, susijusių su šia teorema; beveik nenagrinėja ir grynai metodinių klausimų, tik šiek tiek kritikuoja tradicinį Pitagoro teoremos įrodymą, kuris pateikiamas beveik visuose mokykliniuose vadovėliuose. Net ir šitokioje nedidelėje knygelėje Licmanas sugebėjo pateikti pakankamai įdomios medžiagos, kuri sudomins pradedantįjį matematiką.

Atskiri knygelės paragrafai labai mažai priklauso vienas nuo kito; tai ne vientisas pasakojimas apie vieną dalyką, o greičiau laisvas pokalbis ta tema. Šiuo požiūriu knygelė artima kitai to paties autoriaus knygelei — „Sena ir nauja apie skritulį". Dėstant įterpta daug pratimų, kuriuos spręsdamas skaitytojas įsitikins, kiek jis suprato medžiagą; patariame skaitytojams nepraleisti šios progos. Knygelė pirmiausia skiriama vidurinės mokyklos vyresniųjų klasių moksleiviams; ji taip pat bus įdomi ir naudinga mokytojui, kuris ras daug medžiagos, tinkamos panaudoti per pamoką arba dirbant su matematikos būreliu.

Ši knygelė jau tris kartus išleista rusų kalba.

Trečiasis rusiškas leidimas yra verstas iš šeštojo vokiško, autoriaus pataisyto ir papildyto leidimo. Rusiškame tekste pateiktos kai kurios redaktoriaus pastabos, pažymėtos žvaigždute; nurodytos ir kai kurios mokslo populiarinimo knygos, papildančios autoriaus dėstomą medžiagą. Be to, rusiškojo leidimo redaktoriui priklauso nedideli intarpai, pažymėti <...> „skliaustais".

*I. Jaglomas*

## PIRMOJO LEIDIMO PRATARMĖ

Šiame „Matematikos bibliotekos" tomelyje nesistengiama surinkti kuo daugiau įvairių Pitagoro teoremos įrodymų arba prie žinomų įrodymų pridėti naujus. Mes norėjome tik parodyti paprastu pavyzdžiu, tarp kitko, labai svarbiu tiek matematikos istorijai, tiek ir jos dėstymui, kaip įvairiai gali bendrauti skirtingos matematikos sritys, kaip glaudžiai susipynę matematiniai faktai, sudarantys netgi ne grandinę, o tinklą. Ir, visų pirma, autorius stengėsi, nors knygelės apimtis ir nedidelė, sužadinti matematikų norą savarankiškai mąstyti. Tai rodo ir daugybė įvairių klausimų, tik prabėgomis užsimenamų tekste.

## ŠEŠTOJO LEIDIMO PRATARMĖ

Nuo pirmojo šios nedidelės knygelės leidimo praėjo beveik 40 metų. Penktąjį leidimą, smarkiai padidėjus apimčiai, teko padalyti į du atskirus leidinius. Šiame šeštajame leidime tie leidiniai vėl sujungti į vieną; be to, čia įtraukta ir papildomos medžiagos, kuri, manytume, bus taip pat įdomi.

## § 1. IŠ PITAGORO TEOREMOS ISTORIJOS

1. „Kadangi šiuo metu būtina nagrinėti taip pat šio periodo menų ir mokslų pradžią, tai pranešame, kad, daugumos nuomone, pirmieji geometriją atrado egiptiečiai, kurie suprato jos tiesas, matuodami žemės sklypus. Ir nieko nuostabaus, kad sukurti šį mokslą, kaip ir kitus, paskatino būtinybė, nes viskas, kas atsiranda, juda pirmyn nuo netobulo prie tobulo. Egzistuoja natūralus perėjimas nuo jutiminio suvokimo prie mąstymo, o nuo čia — prie protingo pažinimo."

Šiais žodžiais prasideda senųjų graikų „Matematikų sąrašas", priskiriamas E u d e m u i. Toliau jame minimi atskiri graikų matematikai, pradedant Talesu iš Mileto, ir kiekvieno jų nuopelnai apibūdinami trumpai, bet gana taikliai. Šiame „Sąraše" apie Pitagorą štai kas pasakyta: „Kaip pasakojama, Pitagoras šios (geometrijos) srities užsiėmimus pavertė tikru mokslu, nagrinėdamas jo pagrindus aukštesniu požiūriu ir įrodinėdamas jo teorijas ne tiek materialiniu, kiek intelektualiniu būdu".

Kada gyveno Pitagoras Samosietis, tiksliai nežinoma; vieni spėja, kad jis gimė 569 m. pr.m.e. ir mirė 470 m., kiti mano jį gimus 580 m., o mirus maždaug 500 m. Iš Pitagoro gyvenimo aprašymo mums svarbu tai, kad jis, matyt, ilgą laiką gyvenęs Egipte, o gal net ir Babilonijoje, ir kad tai jam turėję didelės įtakos.

Iš šių skurdžių žinių sunku atskirti, kuriuos Pitagorui priskiriamus atradimus tikrai jis pats yra padaręs, o kuriuos — jo pirmtakai arba jo mokiniai. Tą patį galima pasakyti ir apie teoremą, kuri beveik visur vadinama Pitagoro vardu (Prancūzijoje, taip pat kai kuriose Vokietijos srityse kartais ji dar vadinama „asilų tiltu", *le pont aux ânes, die Eselbrücke):*

*Kvadratas, nubraižytas ant stačiojo trikampio įžambinės, yra lygus sumai kvadratų, nubraižytų ant jo statinių.*

Šiuo metu visi sutinka su tuo, kad ši teorema nebuvo Pitagoro atradimas. Tačiau vieni teigia, kad Pitagoras pirmasis pateikė pilnavertį jos įrodymą, kiti nepriskiria jam nė tų nuopelnų. Būtų sunku atsakyti į klausimą, kaip atrodė šis įrodymas. Kai kas priskiria Pitagorui įrodymą, kurį Euklidas (gyvenęs 300 m. pr.m.e. Aleksandrijoje) pateikia pirmoje savo „Elementų" knygoje; kita vertus, Proklas, gyvenęs nuo 410 arba 412 m. iki 485 m. Bizantijoje ir Atėnuose, tvirtino, kad „Elementuose" pateiktasis įrodymas priklauso pačiam Euklidui.

Kaip matome, matematikos istorija beveik neišsaugojo tikslių duomenų apie Pitagoro gyvenimą ir jo matematinę veiklą. Už tai legendoje aprašomos netgi smulkiausios teoremos atsiradimo aplinkybės. Daugelis žino Šamiso sonetą:

Kaip ir senovė, mini ši diena
Pitagoro kadais atskleistą tiesą.
Kai tik tiesos išvystam pirmą šviesą,
Nuo tol tiesa lyg saulė amžina.

Bet dar brangesnė ji patiems pirmiesiems.
Sukūrę teoremą, ką jie jaučia!
Pitagoras iš džiaugsmo šimtą jaučių
Nusprendė paaukot dievams aukštiesiems.

Todėl dabar, kai tik į naują vaisių,
Minties suvoktą, mokslas tiesia ranką,
Tuoj jaučiai baubia, vietos sau neranda,

Pitagoro išgąsdinti kadaise.
Šviesos sklidimo jiems nesutūrėti,
Belieka užsimerkti ir drebėti*.

Šį pasakojimą apie aukas dievams randame Diogeno, Laerto ir Plutarko raštuose, bet, aišku, jis pramanytas. Todėl netenka prasmės ir ta pašiepianti Heinricho Heinės pastaba apie sielų persikėlimą:

---

* Šamiso soneto vertimas paimtas iš V. Licmano knygelės „Tik kas linksma ir įdomu apie skaičius ir figūras" („Mintis", Vilnius, 1968, p. 39).

„Kas žino! Kas žino! Gal būt, Pitagoro siela persikėlė į vargšą kandidatą, kuris negalėjo įrodyti Pitagoro teoremos ir dėl to susikirto per egzaminus, tuo tarpu jo egzaminatoriuose buvo sielos tų jaučių, kuriuos Pitagoras, džiūgaudamas atskleidęs savo teoremą, paaukojo nemirtingiems dievams".

Praėjusio amžiaus pabaigoje pradėta įvairiausiai spėlioti, kad Marse gyvenančios būtybės, panašios į žmones. Tokios mintys kilo ryšium su Skiparelio* ir kitų astronomų atradimais. Todėl buvo gyvai diskutuojama, ar nebūtų galima susižinoti su tomis spėjamomis gyvomis būtybėmis šviesos signalais. Paryžiaus Mokslų akademija net paskyrė 100 000 frankų premiją tam, kas pirmasis užmegs ryšį su kokia nors būtybe iš kito dangaus kūno (tarp kitko, marsiečiai čia nesiskaitė, nes tai — pernelyg lengvas uždavinys!); ši premija vis dar laukia laimingojo. Juokais, nors ir ne visai be pagrindo, buvo pasiūlyta Marso arba kitos kurios planetos gyventojams perduoti šviesos signalais Pitagoro teoremos brėžinį. Neaišku, kaip tai padaryti; tačiau mes, Žemės gyventojai, esame įsitikinę, kad matematinis faktas, išreikštas Pitagoro teorema, teisingas visur, todėl kito pasaulio gyventojai turi suprasti tokį signalą.

2. Istorinę apžvalgą pradėsime nuo kiniečių. Ypač dėmesį patraukia matematinė Čiu-pejo knyga. Pirmoje jos dalyje rašoma apie dviejų asmenų, gyvenusių maždaug 1100 m. pr.m.e., pokalbį, bet vargu ar iš to galime spręsti, kaip tai tvirtinama pratarmėje, parašytoje 1213 metais, kad minimi faktai tuo metu jau buvę žinomi. Gal būt, mus dominanti knygos dalis buvo parašyta mūsų eros pradžioje.

Šiame kūrinyje apie Pitagoro trikampį su kraštinėmis 3, 4 ir 5 sakoma taip:

*„Jeigu statųjį kampą padalysime į sudedamąsias dalis, tai linija, jungianti jo kraštinių galus, bus 5, kai pagrindas yra 3, o aukštinė 4."*

Čia pateiktas brėžinys (1 brėž.), kuris sutampa su vienu Basharo indusų geometrijos brėžiniu; prie šio klausimo dar grįšime 2 paragrafo 14 punkte.

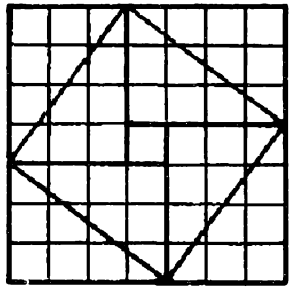
---

* Italų astronomas Skiparelis atrado Marse kanalus, kurie ilgą laiką buvo laikomi dirbtiniais.

3. Kantoras* mano, kad lygybė

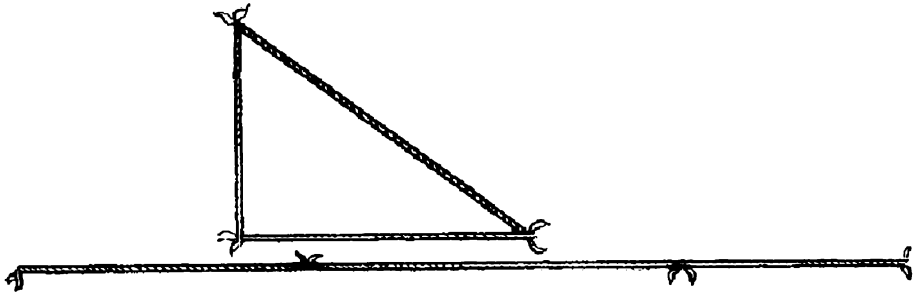
$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$

— kitaip sakant, statusis trikampis, kurio kraštinės yra 3, 4 ir 5,— buvo žinoma jau egiptiečiams maždaug 2300 m. pr.m.e., viešpataujant Amenemhetui I (pagal Berlyno muziejaus papirusą 6619). Kantoro nuomone, kanatininkai, arba „virvių įtempėjai", stačiajam kampui sudaryti naudodavo trikampį, kurio kraštinės lygios 3, 4 ir 5. Ir mes lengvai galime nubraižyti statųjį kampą tuo būdu.



1 pav.

Imkime 12 m virvę ir ant jos užriškime dvi spalvotas juosteles: vieną 3 m atstumu nuo vieno galo, o kitą — 4 m nuo kito galo (žr. 2 brėž.). Dabar įtempkime virvę taip, kaip parodyta brėžinyje. Statusis kampas bus tarp kraštinių, kurių ilgiai 3 ir 4 metrai.

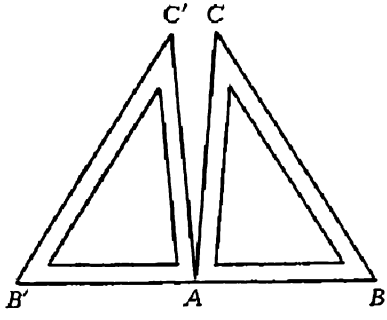


2 pav.

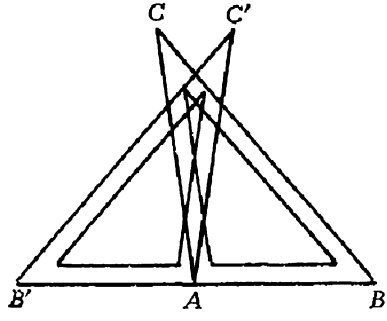
Su virvių įtempėjais būtų galima pasiginčyti, kad jų brėžimo būdas visiškai nereikalingas: kur kas paprasčiau naudotis, pavyzdžiui, mediniu kampainiu, kurį rasime pas kiekvieną stalių. Iš tikrųjų, tokį įrankį matome

* M. Kantoras — įžymiausias vokiečių matematikos istorikas.

jau egiptiečių piešiniuose, kuriuose vaizduojama, pavyzdžiui, stalių dirbtuvės. Tačiau reikėjo sugebėti pasidaryti tokius stačiuosius kampus ir mokėti patikrinti jų tikslumą. Tą buvo galima padaryti, paprasčiausiai trikampį apverčiant (3 ir 4 brėž.). [Deja, nežinau raštiškų dokumentų, kuriais grindė savo teiginį Kantoras, o išlikę iki šiol piešiniai, kuriuose vaizduojamos iškilmės, dedant šventyklos pamatus, lyg ir nepatvirtina jo teiginio.]



3 pav.



4 pav.

Šiek tiek daugiau apie Pitagoro teoremą sužinome iš babiloniečių. Viename tekste, rašytame Hamurabio laikais, t. y. maždaug 2000 m. pr.m.e., pateikiamas apytikslis stačiojo trikampio įžambinės apskaičiavimas, taigi, reikia manyti, Tarpupio gyventojai jau mokėjo, bent kai kuriais atvejais, spręsti stačiuosius trikampius.

Neigebaueris*, remdamasis įvairiais faktais, laiko įtikėtinu, kad Babilonijoje buvo žinoma Pitagoro teorema ir mokėta ja naudotis. Remiantis paskutiniųjų ikigraikiškosios matematikos tyrinėjimų duomenimis, tenka atsisakyti daugelio ankstesnių teiginių apie graikų prioritetą.

Van der Vardenas**, remdamasis šių dienų žiniomis apie egiptiečių ir babiloniečių matematiką ir kar-

---

* O. Neigebaueris — garsus vokiečių matematikos istorikas, babiloniečių matematikos tyrinėtojas; šiuo metu gyvena ir dirba Amerikoje. Neigebauerio knyga „Paskaitos apie antikinių matematikos mokslų istoriją" (I t.— Matematika iki graikų periodo) išversta į rusų kalbą («Лекции по истории античных математических наук», М.—Л., ОНТИ, 1937).

** B. L. Van der Vardenas — garsus olandų matematikas, pastaruoju metu tyrinėjęs matematikos istoriją. Žr. jo knygą «Пробуждающаяся наука (математика Древнего Египта, Вавилона и Греции)», М., Физматгиз, 1959.

tu kritiškai vertindamas graikų šaltinius, neseniai padarė šitokią išvadą:

*„Pirmųjų graikų matematikų — Taleso, Pitagoro ir pitagoriečių — nuopelnas yra ne matematikos atradimas, bet jos susisteminimas ir pagrindimas. Jų rankose skaičiavimo receptai, pagrįsti neaiškiais vaizdiniais, virto tiksliu mokslu".*

4. Indusų, kaip ir egiptiečių bei babiloniečių, geometrija buvo glaudžiai susijusi su kultu. Manoma, kad teorema apie įžambinės kvadratą buvo žinoma Indijoje maždaug VIII amžiuje iki m.e.

„Indų religinės apeigos negali apsieiti be geometrijos taisyklių, nes jos susijusios su labai tiksliais nurodymais. Jeigu altoriuje bent kiek nukrypsta nuo nurodytos formos, jeigu jo viena briauna su kita nesudaro tikslaus stačiojo kampo, jeigu padaryta nors menkiausia klaida, orientuojant altorių keturių pasaulio šalių atžvilgiu,— dievas nepriims jam aukojamos aukos" (Kantoras).

Be grynų ritualinių nurodymų, surašytų vadinamosiose *Kalpasutrose*, yra išlikę ir geometrinio-teologinio pobūdžio kūriniai, vadinamosios *Sulvasutros*. Šiuose kūriniuose, rašytuose IV arba V amžiuje pr.m.e., nurodyta, kaip sudaryti statųjį kampą, naudojant trikampį, kurio kraštinės lygios 15, 36 ir 39 vienetams (plg. § 7). Kantoras stačiojo kampo sudarymą aprašo šitaip. Tiksliai iš rytų į vakarus kuoleliais pažymimas 36 padų (padas — ilgio matas) atstumas, vadinamas „praci". Prie kuolelių pririšama 54 padų ilgio virvė su mazgu, kuris iš anksto užmegztas 15 padų atstumu nuo vieno galo. Po to virvelė įtempiama, prakišus pro mazgą kuolelį, ir viename „praci" gale gaunamas statusis kampas.

Kvadratinei šakniai traukti geometriniu būdu pateikiamos šios taisyklės, pagrįstos Pitagoro teorema:

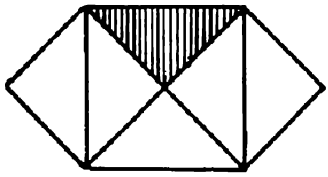
1. Ant virvės, įtemptos įstrižai lygiakraščio stačiakampio, susidaro kvadratas, turintis dvigubą plotą*.

2. Ant virvės, įtemptos įstrižai stačiakampio, susidaro du plotai, kurie gaunami ant virvių, įtemptų išilgai mažesnės ir didesnės kraštinės.

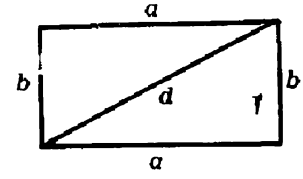
---

* Virvė, sutampanti su kvadrato įstrižaine, yra kraštinė kvadrato, kurio plotas du kartus didesnis už pradinio kvadrato.

Antrą atvejį galima patikrinti, paėmus trikampį, kurio kraštinės lygios 3 ir 4 ilgio vienetams, arba 12 ir 5, arba 15 ir 8, arba 7 ir 24, arba 12 ir 35, arba 15 ir 36.



5 pav.




6 pav.

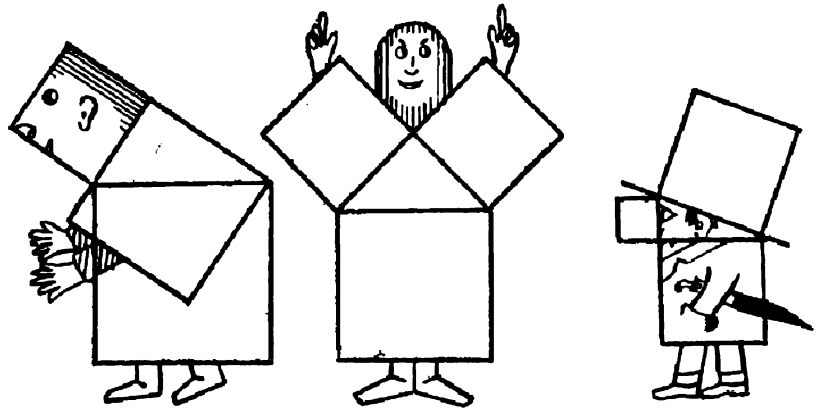
Pirmoji taisyklė išreiškia Pitagoro teoremą lygiašoniams statiesiems trikampiams. Kad ši taisyklė teisinga, galima įsitikinti, pažvelgus į 5 brėžinį. Antroji taisyklė išvedama iš brėžinio, panašaus į toliau aprašomą 28 brėžinį. Lengva suvokti, kad tai iš tikrųjų kvadratinės šaknies traukimas geometriniu būdu: jeigu $a$ ir $b$ — stačiakampio kraštinės, tai jo įstrižainė (6 brėž.) išreiškiama formule

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

**5.** Tolesniam matematinių žinių plitimui indusai turėjo mažai įtakos, o kiniečiai — dar mažiau. Pasaulis susipažino su gausiomis šių tautų matematinėmis žiniomis tiktai naujaisiais amžiais. Iš senųjų amžių į viduramžius buvo eita iš graikų per arabus.

Viduramžiais Pitagoro teorema, *magister matheseos*, buvo riba, rodanti jei ne gausiausias tuo metu galimas, tai bent jau tikrai gilias matematikos žinias. Būdingas Pitagoro teoremos brėžinys, kuris nūnai moksleivių sąsiuviniuose kartais virsta, pavyzdžiui, profesoriumi, apsigaubusiu mantija (7, 8 brėž.), arba žmogiūkščiu su cilindru (9 brėž.) ir t. t., anais visuotinės simbolių aistros laikais dažniausiai buvo matematikos simbolis. Dažnai susiduriame su „Pitagoru" ir viduramžių tapyboje, mozaikoje, heraldikoje.

**6.** Baigdami šį įvadinį paragrafą, pateiksime įvairias Pitagoro teoremos formuluotes graikų, lotynų, vokiečių, lietuvių kalbomis.



7, 8, 9 pav.

Euklidas šią teoremą užrašė šitaip:

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Pažodžiui išvertus, tai būtų: *„Stačiajame trikampyje kvadratas kraštinės, ištemptos virš stačiojo kampo, lygus kvadratams kraštinių, tarp kurių yra statusis kampas".*

Anaricijaus (maždaug 900 m.) arabišką tekstą išvertė lotyniškai Gerhardas Kremonskis (12 amžiaus pradžia) šitaip:

*Omnis trianguli orthogonii quadratum factum ex latere subtenso angulo recto equale est coniunctioni duorum quadratorum, qui fiunt ex duobus lateribus, qui continent angulum rectum.*

Išversime: *„Bet kuriame stačiajame trikampyje kvadratas, sudarytas ant kraštinės, įtemptos virš stačiojo kampo, yra lygus sumai dviejų kvadratų, sudarytų ant dviejų kraštinių, tarp kurių yra statusis kampas".*

„Geometria Culmonensis" (maždaug 1400 m.) teorema užrašyta šitaip:

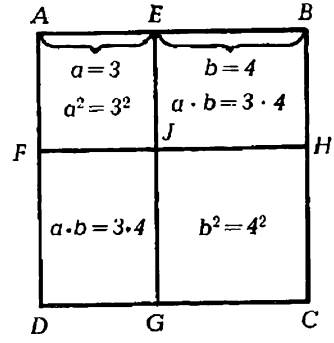
Alzo wirt dab vierkante veld, gemeſſen vz der langen want, alzo grob alz dy beyde vierkante, dy do werden kemeſſen von den czwen wenden deb geren, dy do czuſamene treten in dem rechten wynkel.

Išvertus tai reiškia: *„Vadinasi, plotas kvadrato, išmatuoto pagal ilgąją kraštinę, yra tokio pat didumo, kaip ir dviejų kvadratų, išmatuotų pagal dvi jo kraštines, esančias prie stačiojo kampo".*

<Pirmajame rusiškame Euklido „Elementų" vertime* (iš graikų kalbos išvertė F. Petruševskis) Pitagoro teorema užrašyta šitaip: *„Stačiuosiuose trikampiuose kvadratas iš kraštinės, esančios prieš statųjį kampą, yra lygus sumai kvadratų iš kraštinių, sudarančių statųjį kampą".*>

## § 2. PITAGORO TEOREMOS ĮRODYMAS SUSKAIDYMO METODU

1. Nubrėžkime kvadratą *ABCD*, kurio kraštinė yra 7 cm (10 brėž., sumažintas). Nuo viršūnės *A* kraštinėse *AB* ir *AD* atidėkime atkarpas $AE = AF = 3$ cm ir per gautus taškus *E* ir *F* nubrėžkime tieses, lygiagrečias




10 pav.

kvadrato kraštinėms. Vienos iš jų susikirtimo su kraštine *DC* tašką pažymėkime raide *G*, o antrosios susikirtimo su kraštine *BC* tašką — raide *H* ir pagaliau tiesių *EG* ir *FH* susikirtimo tašką — raide *J*. Dabar pradinis kvadratas, kurio kraštinė 7 cm, bus padalytas į keturias dalis: kvadratą, kurio kraštinė 3 cm, kvadratą, kurio kraštinė 4 cm, ir du lygius stačiakampius, kurių gretimos kraštinės lygios 3 ir 4 cm.

Ieškodami kvadrato ploto kvadratiniais centimetrais, turime skaičių, kuris reiškia kraštinės ilgį centimetrais, padauginti patį iš savęs. Ieškodami stačiakampio ploto,

* «Евклидовых начал восемь книг, содержащие в себе основание геометрии», Санкт-Петербург, 1819.

sudauginame skaičius, kurie reiškia dviejų gretimų kraštinių ilgius.

Įsižiūrėję į anksčiau aprašytą figūrą, galime pastebėti, kad ji atvaizduoja geometriškai lygybę

$$7^2 = 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4$$

arba (skaičių 7 pakeitus suma 3 + 4) lygybę

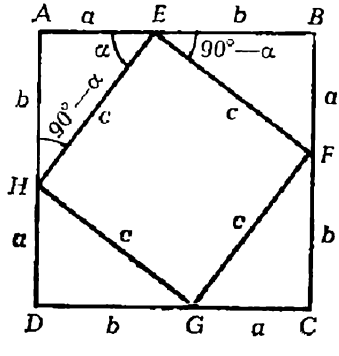
$$(3 + 4)^2 = 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4.$$

Iš tikrųjų, apskaičiavę abi lygybių puses, gauname po 49.

Šiame pavyzdyje ėmėme skaičius 3, 4, 7, bet juos pasirinkome visiškai atsitiktinai. Tą patį rezultatą gautume, paėmę bet kokius skaičius $a$, $b$ ir jų sumą $a + b$. Šitaip samprotaudami, mes ir įrodome gerai žinomą formulę

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Geometrinė figūra, kurią naudojome formulei $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ įrodyti, buvo žinoma Euklidui, taip pat indusams iki mūsų eros pradžios. „Bendrą taisyklę duotajam kvadratui padidinti" jie išreiškė (deja, ne itin aiškiai) šitokiais žodžiais: „Pridėk prie dviejų kraštinių tiek, kiek reikia vienam pailginimui, o prie viršūnės — kvadratą, kuris susidaro iš to pailginimo".




11 pav.

2. Dar kartą nubrėžkime kvadratą, kurio kraštinė 7 cm, bet dabar jį padalykime kitaip. Kiekvienoje kraštinėje atidėkime nuo kvadrato viršūnės po 3 cm tokia tvarka, kaip parodyta 11 brėžinyje. Gautus taškus $E$, $F$, $G$, $H$ sujunkime nuosekliai vieną su kitu. Gausime keturkampį $EFGH$ ir keturis stačiuosius trikampius, kurių

stačiųjų kampų viršūnės sutampa su pradinio kvadrato viršūnėmis. Šie trikampiai lygūs, nes turi po dvi lygias kraštines ir po lygų kampą, esantį tarp tų kraštinių (pirmasis trikampių lygybės požymis). Taigi visų šių trikampių įžambinės lygios, ir keturkampis *EFGH* yra rombas. Skaitytojas tikriausiai jau pastebėjo, kad šis keturkampis — ne tik rombas, bet ir kvadratas. Iš tikrųjų, jei kampą *AEH* pažymėsime $\alpha$, tai kampas *AHE* bus lygus $90° - \alpha$ (remiamės teiginiu, kad trikampio kampų suma lygi 180°). Kadangi visi keturi trikampiai lygūs, tai kampas *BEF* lygus kampui *AHE*. Vadinasi, kampas *HEF* turi būti lygus 90°, nes trys kampai su bendra viršūne *E* sudaro ištiestinį kampą, lygų 180°. Taip pat galime samprotauti ir apie kitus rombo kampus *F*, *G* ir *H*. Tačiau ir pateiktojo įrodymo visiškai pakanka: jeigu vienas lygiakraščio keturkampio (rombo) kampas yra status, tai ir kiti turi būti tik statūs.

Dabar vietoj konkrečių skaičių 3 ir 4 imkime bet kokius skaičius $a$ ir $b$, o gauto stačiojo trikampio įstrižainę pažymėkime raide $c$. Tuomet kvadrato suskaidymas, atvaizduotas 11 brėžinyje, išreiškiamas šitokia formule:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\,\frac{ab}{2}\,.$$

Iš tikrųjų, vidinio kvadrato, kurio kraštinė $c$, plotas lygus $c^2$, o kiekvieno trikampio plotas lygus $\frac{ab}{2}$.

Pastarąją lygybę galima perrašyti kitaip:

$$(a + b)^2 = c^2 + 2ab.$$

Iš šios lygybės, žinodami statinių $a$ ir $b$ skaitines reikšmes, galime apskaičiuoti įžambinę $c$. Pavyzdžiui, ir vėl imkime $a = 3$, $b = 4$; tuomet iš pastarosios lygybės gausime:

$$49 = c^2 + 2\cdot 3\cdot 4;$$

iš čia $c^2 = 25$, o $c = 5$.

**3.** Susiesime tai, ką sužinojome paskutiniuose dviejuose punktuose. Pradžioje samprotausime tik aritmetiškai. Pirmame punkte gavome formulę

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab, \qquad (1)$$

o antrame punkte —

$$(a+b)^2 = c^2 + 2ab. \qquad (2)$$

Iš jų išplaukia lygybė

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab;$$

praleidę abiejose pusėse dėmenį $2ab$, gausime

$$a^2 + b^2 = c^2. \qquad (3)$$

Pastarojoje lygybėje $a$ ir $b$ yra stačiojo trikampio statinių ilgiai, o $c$ — jo įžambinės ilgis, taigi čia ne kas kita, kaip Pitagoro teorema!

Tuo būdu (3) lygybę išvedėme „aritmetiškai". Pastebėsime dar štai ką. (1) formulę žino kiekvienas moksleivis, nes tai — viena iš pirmųjų jo išmokstamų algebros lygybių. (1) lygybė yra tapatybė, t. y. teisinga, esant bet kokioms $a$ ir $b$ reikšmėms. (2) lygybė, priešingai, nėra tapatybė, nes ji nėra teisinga, esant bet kokioms $a$, $b$ ir $c$ reikšmėms; tai — priklausomybė, iš kurios galime, pavyzdžiui, apskaičiuoti $c$, jeigu žinome $a$ ir $b$ (taip jau darėme anksčiau).

**4.** Kai kuriems matematikams gali nepatikti 3 punkte pateiktas Pitagoro teoremos išvedimas, nes dažniausiai vengiama, įrodant teoremą, naudoti abu metodus — geometrinį ir aritmetinį; grynai geometrinio pobūdžio teoremas stengiamasi įrodyti vien geometriškai*. Elementarinėje matematikoje šis siekimas ypač ryškus mokyme apie plotus. Čia plotas nagrinėjamas vien geometriškai, nesiejant su jokiais skaitiniais duomenimis. Pavyzdžiui, įrodinėjama, kad

*du lygiagretainiai su lygiais pagrindais ir su lygiomis aukštinėmis yra lygiapločiai;*

*du trikampiai su lygiais pagrindais ir lygiomis aukštinėmis yra lygiapločiai.*

Panašiai „geometriškai" traktuojant plotų matavimo teoriją, pats matavimas iš esmės yra dviejų figūrų plotų palyginimas. O traktuojant „aritmetiškai", ploto matavimas, priešingai, iš esmės laikomas skaičiavimo operacija. Aukščiau pateiktuosius du teiginius atitiks giminingos „aritmetinės" teoremos:

* Tačiau, mūsų nuomone, šitokiai tendencijai griežtai atriboti atskiras matematines disciplinas nevertėtų pritarti, nes tai trukdo teisingai suvokti visos matematikos perspektyvas.

*lygiagretainio plotas yra lygus jo pagrindo ir aukštinės sandaugai;*

*trikampio plotas yra lygus jo pagrindo ir aukštinės sandaugos pusei.*

Pitagoro teoremą taip pat galima pasakyti dvejopai. „Geometriškai" ją galima išreikšti šitaip:

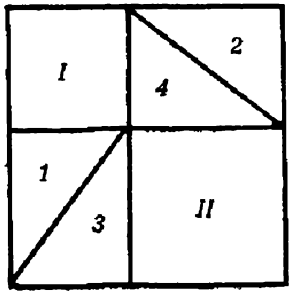
*kvadratas, nubraižytas ant stačiojo trikampio įžambinės, lygus sumai kvadratų, nubraižytų ant jo statinių.*

„Aritmetiškai" ji išreiškiama šitaip:

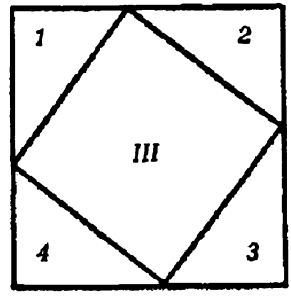
*jeigu a ir b yra skaičiai, reiškiantys statinių ilgius, išmatuotus tais pačiais vienetais, o c — skaičius, reiškiantis įžambinės ilgį, išmatuotą tais pačiais vienetais, tai tie skaičiai a, b ir c susiję šitaip:*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

3 punkte Pitagoro teoremą **įrodėme „aritmetiškai"**; nesunku ją įrodyti ir „vien geometriškai", taip pat remiantis **1** ir **2** punktuose pateiktais brėžiniais. 10 brėžinyje abiejuose stačiakampiuose nubrėžkime po vieną įstrižainę; gausime figūrą, kuri atvaizduota 12 brėžinyje. Kadangi 12 ir 13 brėžiniuose atvaizduoti trikampiai lygūs, *tai I ir II kvadratų plotų suma turi būti lygi III kvadrato plotui.* Tai ir yra Pitagoro teorema.




12 pav.




13 pav.

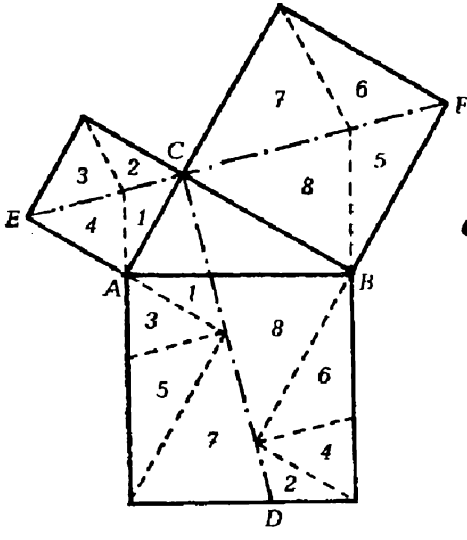
5. Pitagoro teoremą galima įrodyti įvairiais būdais tuo pačiu principu: kvadratai, nubraižyti ant statinių ir ant įžambinės, padalijami taip, kad kiekvieną „įžambininio" kvadrato dalį atitinka vieno iš dviejų „statininių" kvadratų dalis. Visais šiais atvejais, kad suprastume įrodymą, pakanka žvilgtelėti į brėžinį; vietoj samprotavimų čia gana vieno žodžio „žiūrėk!". Taip būdavo rašoma senovės indusų matematikų veikaluose. Tačiau reikia pastebėti, kad įrodymo negalima laikyti pilnu, ne-

įrodžius visų atitinkamųjų dalių lygybės. Tai beveik visuomet lengva padaryti, nors kartais ilgokai užtrunka (ypač kai yra daug dalių).

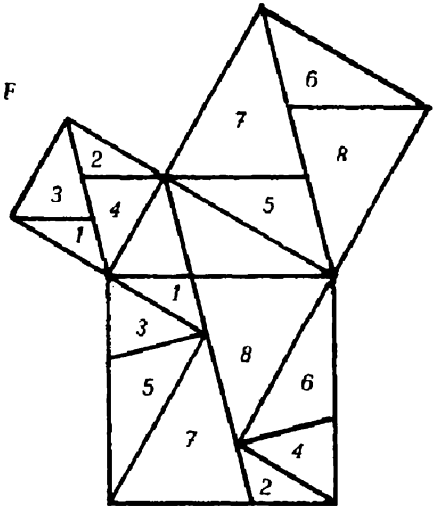
Pradėsime nuo palyginti naujo Epšteino įrodymo; jis pranašesnis tuo, kad kvadratai padalijami tik į trikampius. Analizuodami brėžinį (14 brėž.), turėkime omeny, kad tiesė *CD* nubrėžta statmenai tiesei *EF*.

1 pratimas. Įrodykite, kad tiesė *EF* eina per tašką *C*.

2 pratimas. Kaip pasikeis 14 brėžinys, jeigu statusis trikampis *ABC* bus lygiašonis?




14 pav.



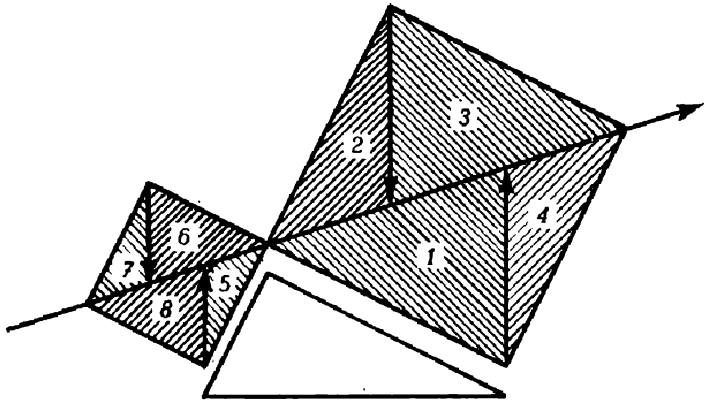

15 pav.

Kvadratus padalyti į trikampius galima daug vaizdžiau, negu 14 brėžinyje. 15 brėžinyje pagalbinės linijos pakeistos, kaip pasiūlė Nilsonas. 16—17 brėžiniuose pateiktas gana vaizdus Biotherio padalijimas.

3 pratimas. Įrodykite pilnai Pitagoro teoremą dalijimo metodu, remdamiesi 14 brėžiniu (arba 15 brėžiniu, arba 16—17 brėžiniais). Reikia įrodyti visų viena kitą atitinkančių dalių lygybes.

6. Vadovėliuose dažnai kvadratai padalijami, kaip parodyta 18 brėžinyje*. Per kvadrato, nubraižyto ant didesniojo statinio, centrą *O* nubrėžiame dvi tieses: vie-

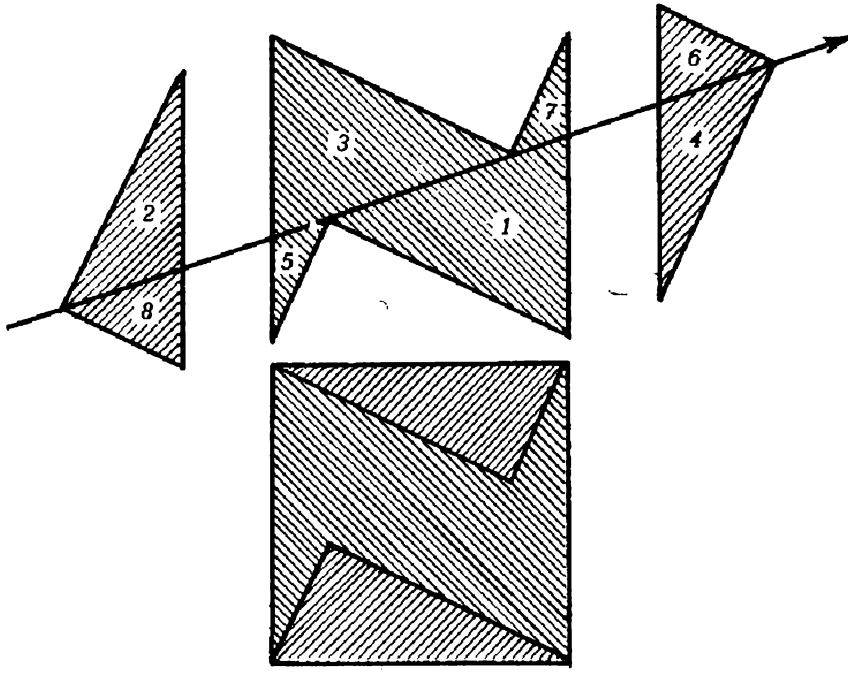
* Vadinamasis „ratas su mentėmis", arba „vėjo malūnėlis". Tokį įrodymą surado Perigalis.




16 pav. Perkilnokite didžiąsias ir mažąsias kvadratų dalis, esančias virš rodyklės.

ną lygiagrečią, o kitą statmeną įžambinei. Kurios figūros dalys atitinka viena kitą, aiškiai matyti brėžinyje.

<18 brėžinys įdomus tuo, kad čia atitinkamos figūros dalys yra ne tik lygios, bet ir „lygiagrečiai išsidėsčiusios", t. y. vieną dalį gauname iš kitos lygiagrečiu postūmiu. Kad šitaip padalyti galima — tiesiog laimingas atsitiktinumas. Pastaruoju metu šveicarų geometrai Chadvigeris ir Gliūras įrodė, *kad bet kuriuos*



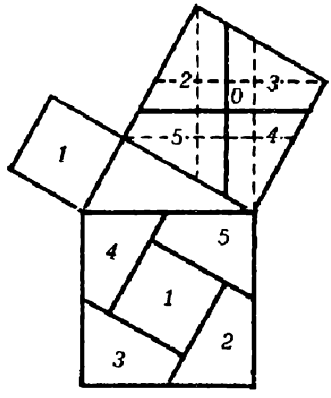

17 pav. ... ir viską gausite savaime!

*du lygiapločius daugiakampius galima padalyti taip, kad atitinkamos* (trikampės arba daugiakampės!) *jų dalys būtų lygios, o tų dalių atitinkamos kraštinės būtų lygiagrečios* (t. y. šios dalys būtų gaunamos viena iš kitos lygiagrečiu postūmiu arba simetrija tašk o atžvilgiu)*.

4 pratimas. Kuriuose dar iš toliau pateikiamų brėžinių kvadratų, nubraižytų ant stačiojo trikampio kraštinių, padalijimas tenkina Chadvigerio ir Gliūro sąlygą?

5 pratimas. Įrodykite, kad linijos, kuriomis padalytas kvadratas, nubraižytas ant įžambinės, yra lygiagrečios statiniams (18 brėž.).

6 pratimas. Apskaičiuokite keturkampių, į kuriuos suskilo kvadratas, nubraižytas ant didesniojo statinio, kraštinių ilgius.




18 pav.

Pastebėsime, kad linijos, kuriomis dalijame kvadratą, nubraižytą ant didesniojo statinio, nebūtinai turi susikirsti kvadrato centre. Per kvadrato viršūnes nubrėšime tieses, lygiagrečias ir statmenas įžambinei, kaip parodyta 18 brėžinyje brūkšnine linija; viduje gaunamas mažesnis kvadratas, kurio bet kurį tašką ir taškus, esančius jo kraštinėse, galima imti tašku O. Toliau įrodoma taip, kaip ir anksčiau. Aišku, dabar nubraižyti keturkampiai nebus tarpusavyje lygūs, kaip kad pagalbinėms linijoms susikertant kvadrato centre.

7 pratimas. Laisvai pasirinkę tašką O, nubraižykite tikslų brėžinį ir, jį sukarpę į dalis, įsitikinkite, kad toks įrodymas teisingas.

8 pratimas. Ištirkite, kaip būtų padalyti kvadratai, jeigu statusis trikampis būtų lygiašonis.

* Žr. šiuo klausimu V. Boltianskio brošiūrą «Равновеликие и равносоставленные фигуры» (Гостехиздат, M., 1956), kuri įdomiai papildo šio paragrafo turinį.

7. Kvadratus galima padalyti į 5 dalis dar vienu būdu, kurį ir išnagrinėkime. Jį randame Euklido veikalų arabiškuose komentaruose, kuriuos sudarė Anarcijus maždaug 900 m. Šį įrodymą, šiek tiek pakeistą, iš naujo pateikė 1824 m. Giopelis.

Kvadratų, nubraižytų ant statinių, padalijimas aiškiai matyti 19 brėžinyje; jį braižant, atsižvelgta ir į Nilseno pasiūlymą, kaip įrodinėti dalių lygybes. Analizuojant, kaip padalytas kvadratas, nubraižytas ant įžambinės, reikia turėti omenyje, kad 3 dalį gauname šitokiu būdu: kvadrato, nubraižyto ant įžambinės, kraštinėje atidedama įžambinė stačiojo trikampio *3*, kuris gaunamas, dalijant kvadratą, nubraižytą ant didesniojo statinio. Galima braižyti ir šiek tiek kitaip: atidėti trikampio *3* statinį kvadrato, nubraižyto ant didesniojo statinio, kraštinės tęsinyje.

Pastarasis dalijimo būdas nėra nei painus, nei dirbtinis. Tatai aiškiai matyti, palyginus 19 brėžinį su 7 brėžiniu, kuriame kvadratas, nubraižytas ant didesnio statinio, yra pasuktas 180° apie tą statinį*.

9 pratimas. Įrodykite, kad kvadratų, nubraižytų ant statinių, *1*—*5* dalys yra lygios kvadrato, nubraižyto ant įžambinės, atitinkamoms dalims.

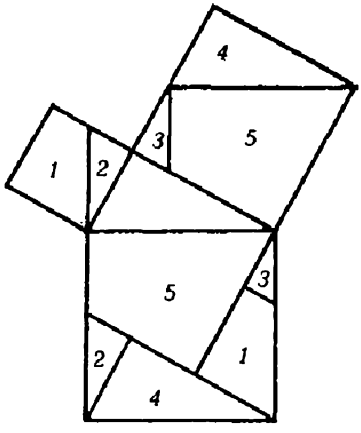
10 pratimas. Išreikškite *1*—*5* figūrų kraštines pradinio trikampio statiniais *a* ir *b* ir įžambine *c* (19 brėž.).

11 pratimas. Nubraižykite atitinkamą brėžinį, imdami lygiašonį statųjį trikampį.

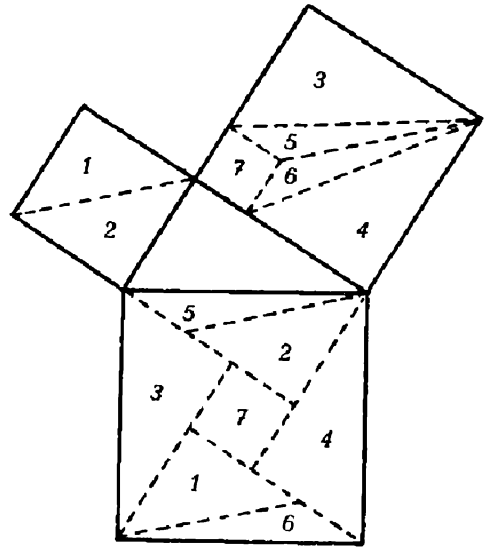
8. 20 brėžinyje atvaizduotas dar vienas dalijimo būdas, kurį pasiūlė Gutheilis. Čia kvadratų dalys išdėstytos taip vaizdžiai, kad galima iš karto pastebėti, kaip supaprastės brėžinys, kai statusis trikampis bus lygiašonis.

9. Be keturių nurodytųjų dalijimo būdų, yra dar daug kitų (žr., pavyzdžiui, 21 ir 22 brėžinius). Tačiau mums užteks ir pateiktųjų įrodymų. O dabar pamėginsime išsiaiškinti, kuris iš visų galimų įrodymų dalijimo būdu yra pats paprasčiausias. Nederėtų apie tai spręsti vien savo nuožiūra, todėl būtinas įrodymo „paprastumo" sąvokos matematinis apibrėžimas; dar daugiau, kadangi ruošiamės šį paprastumą įvertinti, tai privalome susitarti, kuo jį „matuosime". Be to, tokio „mato" pasi-

* Kitaip sakant — simetriškai atvaizduotas statinio atžvilgiu.

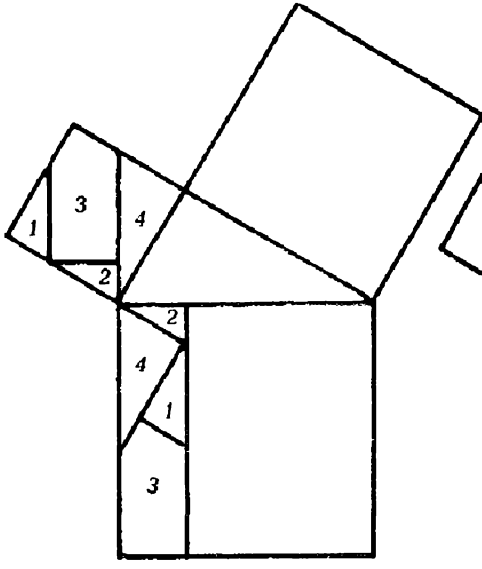



19 pav.

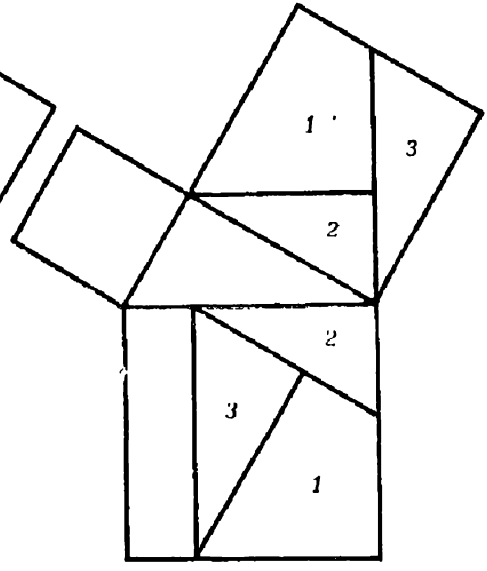



20 pav.

rinkimas, be abejo, taip pat bus subjektyvus. „Paprastumo matas" gali būti, pavyzdžiui, skaičius pagalbinių linijų, nubrėžtų įrodinėjant, arba suskaidymo dalių skaičius, arba abu tie skaičiai kartu. Galima susitarti, kad apie įrodymo „paprastumą" spręsime, suskaičiavę, kiek kartų teko remtis teorema apie trikampių lygybę, turė-




21 pav.




22 pav.

dami omenyje, kad įrodyti reikia viską pilnutinai, nepasikliaujant akivaizdumu. Štai tokiu požiūriu įrodymo paprastumą, Bernšteinui pasiūlius, išnagrinėjo Brandesas. Ieškant paprasčiausio įrodymo, remiantis pastaruoju apibrėžimu, reikia rasti mažiausią skaičių trikampių, į kuriuos galima padalyti ant įžambinės nubraižytą kvadratą taip, kad kiekvieną jų atitiktų lygus trikampis viename iš kvadratų, kurie nubraižyti ant statinių. Epšteino įrodyme, pavyzdžiui, tokių trikampių yra 8; įrodyme, išdėstytame 6 punkte, yra 5 keturkampiai, vadinasi, 10 trikampių; Anaricijaus įrodymo paprastumo matas — skaičius 7.

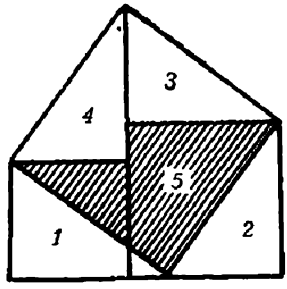
Koks mažiausias trikampių skaičius gali būti gaunamas šitaip dalijant? Ar galima kvadratus padalyti mažiau kaip į 7 trikampius? Brandesas įrodė, kad skaičius 7 iš tikrųjų yra mažiausias, todėl Anaricijaus įrodymą reikia laikyti paprasčiausiu iš visų įrodymų dalijimo metodu. Sudėtingesni yra Epšteino ir Gutheilio įrodymai; dar sudėtingesnis 6 punkte pateiktasis įrodymas.

12 pratimas. Ištirkite, ar, imant kai kurių tipų stačiuosius trikampius, minėtasis skaičius negali būti mažesnis už 7.

Jeigu apie įrodymo paprastumą spręstume, vadovaudamiesi vien intuicija, tai, gal būt, visus keturis minėtuosius įrodymus išdėstytume netgi atvirkštine tvarka. „Matematiškai" tai pateisinama štai kaip: anksčiau, apibrėždami įrodymo „paprastumo matą", visiškai nekreipėme dėmesio į gautų brėžinių simetriškumą. Įsižiūrėkime visuose keturiuose įrodymuose į kvadratą, nubraižytą ant įžambinės: Anaricijaus įrodyme ši figūra visiškai nesimetriška, Epšteino ir Gutheilio padalyti kvadratai „iš dalies simetriški", o „labiausiai simetriška", jeigu galima taip išsireikšti, paskutiniojo įrodymo figūra. Taigi įsivaizduokime, kad perbraižėme ant permatomo popieriaus kvadratą, nubraižytą ant įžambinės, padalijome jį į dalis, kaip parodyta 14—15, 18, 19 arba 20 brėžiniuose, uždėjome ant atitinkamo brėžinio ir pradėjome sukti permatomąjį brėžinį apie kvadrato centrą. Matysime, kad Anaricijaus išskaidymo brėžinys vėl visiškai sutaps su savo kopija, pastarąją pasukus 360°, Epšteino ir Gutheilio — 180°, o 18 brėžinys — 90°.

10. Iki šiol nagrinėjome tik tokius įrodymus, kuriuose kvadratas, nubraižytas ant įžambinės, ir kvadratai, nu-

braižyti ant statinių, buvo dalijami į atitinkamas lygias dalis. Tokie įrodymai vadinami *įrodymais sudėties metodu* („adityviniais įrodymais") arba dažniau *įrodymais skaidymo metodu*. Iki šiol kvadratus, nubraižytus ant atitinkamų trikampio kraštinių, palikdavome įprastinėje jų padėtyje, t. y. trikampio išorėje. Tačiau daugeliu atvejų naudingiau tuos kvadratus išdėstyti kitaip. 23 brė-



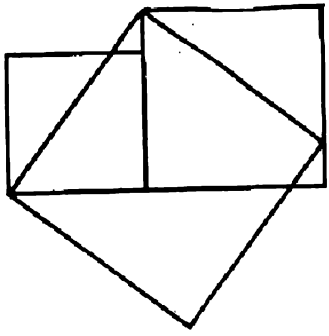

23 pav.

žinyje kvadratai, nubraižyti ant statinių, išdėstyti tartum pakopos, vienas šalia kito. Tokią figūrą randame įrodymuose, parašytuose tikriausiai ne vėliau kaip IX mūsų eros amžiuje. Indusai ją vadino „nuotakos kėde". Kaip braižyti kvadratą, kurio kraštinė lygi įžambinei, aiškiai matyti brėžinyje. Jame užbrūkšniuotas netaisyklingas penkiakampis 5, yra ne kas kita, kaip kvadratų, nubraižytų ant statinių ir kvadrato, nubraižyto ant įžambinės, bendroji dalis. Pridėję prie penkiakampio 5 trikampius *1* ir *2*, gausime abu kvadratus, nubraižytus ant statinių; pakeitę trikampius *1* ir *2* jiems lygiais trikampiais *3* ir *4*, gausime kvadratą, nubraižytą ant įžambinės.

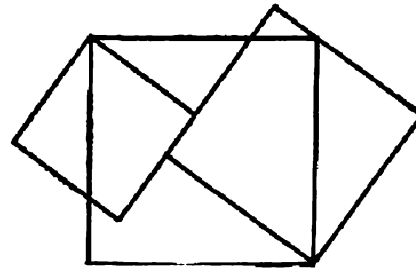
13 p r a t i m a s. Išnagrinėkite, kaip pasikeis 23 brėžinys, pakeitus visus kvadratus tarpusavyje panašiais rombais.

14 p r a t i m a s. 24 ir 25 brėžiniuose kvadratai išdėstyti skirtingai, bet panašiai kaip 23 brėžinyje. (Tarp kitko, 24 brėžinyje vėl turime „nuotakos kėdę".) Įrodykite Pitagoro teoremą, remdamiesi šiais brėžiniais.

Išsiaiškinę šio įrodymo „paprastumo matą", gausime skaičių 5, t. y. mažesnį, negu anksčiau. Tokį mažą skaičių gauname, ypatingai išdėstę kvadratus, nubraižytus ant statinių. Jeigu juos nubraižytume atskirai, tai įrodymui prireiktų dar kelių pagalbinių linijų, ir vėl gautume figūrą, jau pažįstamą iš Anaricijaus įrodymo. Kitaip sakant, prieš mus visai ne naujas įrodymas, o tik kitas to paties įrodymo variantas.



24 pav.

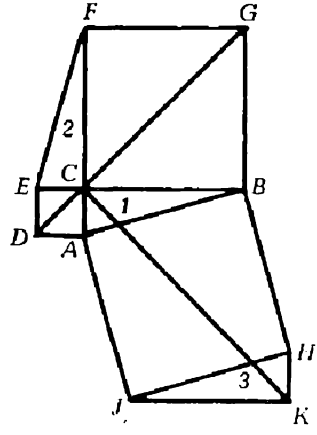


25 pav.

**11.** Be įrodymų sudėties metodu, galima pateikti ir *įrodymų atimties metodu* pavyzdžių. Tokie įrodymai dar vadinami *įrodymais papildymo metodu.* Bendras visų tokių įrodymų principas štai koks: iš dviejų lygių plotų reikia atimti lygiaplotes dalis taip, kad vienu atveju liktų du kvadratai, nubraižyti ant statinių, o kitu — kvadratas, nubraižytas ant įžambinės*. Iš tiesų, jeigu lygybėse

$$A-B=C \text{ ir } A'-B'=C'$$

dalis $A$ lygiaplotė $A'$, o dalis $B$ lygiaplotė $B'$, tai dalys $C$ ir $C'$ taip pat lygiaplotės.




26 pav.

Paaiškinsime šį metodą pavyzdžiu. 26 brėžinyje prie įprastos Pitagoro figūros iš viršaus ir iš apačios pridėti

* Kitaip sakant, papildyti dvi mus dominančias figūras (du kvadratus, nubraižytus ant statinių, ir kvadratą, nubraižytą ant įžambinės) lygiomis figūromis taip, kad šio papildymo pasekmė būtų lygios figūros.

trikampiai *2* ir *3*, lygūs pradiniam trikampiui *1*. Tiesė *DG* būtinai eis per tašką *C* — su šiuo faktu jau teko susidurti (žr. **5** punktą). Dabar pastebėsime (vėliau tai įrodysime), kad šešiakampiai *DABGFE* ir *CAJKHB* lygiapločiai. Jeigu iš pirmojo šešiakampio atimtume trikampius *1* ir *2*, tai liktų kvadratai, nubraižyti ant statinių, o jeigu iš antrojo šešiakampio atimtume lygius trikampius *1* ir *3*, tai liktų kvadratas, nubraižytas ant įžambinės. Iš čia ir išplaukia, kad kvadratas, nubraižytas ant įžambinės, lygiaplotis sumai kvadratų, nubraižytų ant statinių.

Lieka įrodyti, kad minėtieji šešiakampiai lygiapločiai. Pirmiausia pastebėsime, kad tiesė *DG* dalija viršutinį šešiakampį į lygiaplotes dalis; tą patį galima pasakyti apie tiesę *CK* ir žemutinį šešiakampį. Pasukime keturkampį *DABG*, kuris sudaro pusę šešiakampio *DABGFE*, 90° kampu apie tašką *A*, kaip sukasi laikrodžio rodyklė; tuomet jis sutaps su keturkampiu *CAJK*, kuris sudaro pusę šešiakampio *CAJKHB*. Todėl šešiakampiai *DABGFE* ir *CAJKHB* lygiapločiai. Galima pasidaryti tokias figūras iš kartono ir, tiesiog uždedant jas vieną ant kitos, įsitikinti, kad jos yra lygiaplotės.

15 p r a t i m a s. Koks šio įrodymo papildymo metodu ryšys su Epšteino įrodymu?

**12.** Pirmą kartą įrodinėjant papildymo metodu, kiek sunkiau buvo pagrįsti pradinių figūrų lygiaplotiškumą, o atimamos dalys buvo visiškai paprastos. Susipažinkime su dar kitokiais įrodymo būdais. Dabar pradinėmis figūromis, iš kurių, atimant lygias dalis, norima gauti ieškomus kvadratus, imsime ne dvi skirtingas figūras, o vieną ir tą pačią.

Jau žinomą Pitagoro teoremos brėžinį įsprauskime į stačiakampį rėmą, kurio kraštinių kryptys sutampa su trikampio statinių kryptimis (27 brėž.). Kai kurias figūros atkarpas pratęsus, kaip nurodyta 27 brėžinyje, stačiakampis padalijamas į keletą trikampių, stačiakampių ir kvadratų.

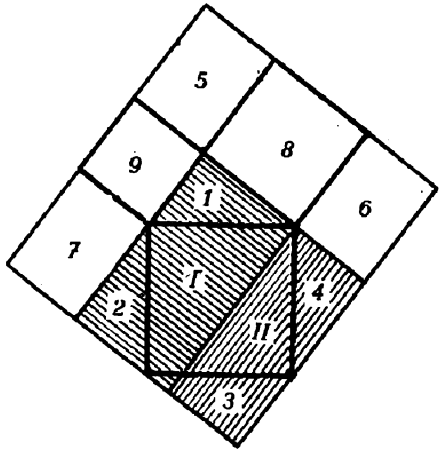
Pradžioje iš stačiakampio „išmesime" keletą dalių, kad liktų tik kvadratas, nubraižytas ant įžambinės. Kaip matome, teks „išmesti" šias dalis:

1) trikampius *1*, *2*, *3*, *4*;
2) stačiakampį *5*;

3) stačiakampį *6* ir kvadratą *8;*
4) stačiakampį *7* ir kvadratą *9.*

Po to iš stačiakampio „išmesime" tas dalis, be kurių lieka tik kvadratai, nubraižyti ant statinių, būtent:

1) stačiakampius *6* ir *7*;
2) stačiakampį *5;*
3) stačiakampį *I* (užbrūkšniuotą);
4) stačiakampį *II* (taip pat užbrūkšniuotą).




27 pav.

Beliko įrodyti, kad atimtosios dalys yra lygiaplotės. Tuo lengvai įsitikiname, stebėdami 27 brėžinyje išdėstytas figūras:

1. Keturi trikampiai *1, 2, 3, 4* lygiapločiai dviem stačiakampiams *6* ir *7*.
2. Stačiakampis *5* lygiaplotis pats sau.
3. Stačiakampis *6* kartu su kvadratu *8* lygiaplotis stačiakampiui *I*.
4. Stačiakampis *7* kartu su kvadratu *9* lygiaplotis stačiakampiui *II*.

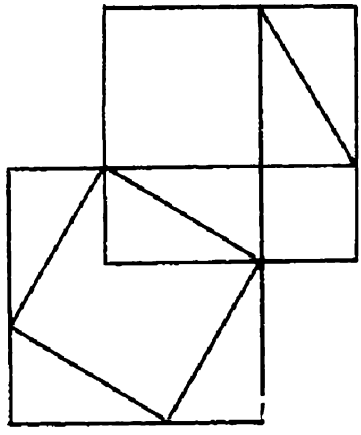
Įrodymas baigtas.

16 pratimas. Iš naujo įrodykite, išreiškę figūrų plotų skaitines reikšmes trikampio kraštinėmis *a, b* ir *c*.

17 pratimas. Jeigu imtume ne stačiakampį, apibrėžtą apie visą Pitagoro figūrą, o tik jo dalį, ir šiek tiek kitaip jį padalytume, tai įrodymas būtų paprastesnis. Tai ir atvaizduota 28 brėžinyje. Parodykite, kad 28 brėžinys yra ne kas kita, kaip 10 ir 11 brėžinių kombinacija.

**13.** Būtų galima pateikti ir daugiau įrodymų, panašių į išnagrinėtąjį **12** punkte; nurodysime tik jų planą.

Tarkime, kad kiekvieną iš trijų kvadratų, kuriuos nubraižėme ant stačiojo trikampio kraštinių, galima sukti apie atitinkamas kraštines. „Pagrindinis" kvadratų išsidėstymas, kuriuo rėmėmės praeitame punkte,— visi kvadratai nukreipti į išorę. Tačiau, vieną ar kitą kvadratą pasukdami, galime gauti šiuos atvejus:



28 pav.

1. Visi kvadratai nukreipti į išorę.
2. Visi kvadratai nukreipti į vidų.
3. Kvadratai, nubraižyti ant statinių, nukreipti į išorę, o trečiasis kvadratas — į vidų.
4. Kvadratas, nubraižytas ant įžambinės, nukreiptas į išorę, o kiti du — į vidų.
5. Vienas iš kvadratų, nubraižytų ant statinių, nukreiptas į vidų, o du kiti kvadratai — į išorę.
6. Vienas iš kvadratų, nubraižytų ant statinių, nukreiptas į išorę, o kiti du — į vidų.

Dviem paskutiniaisiais atvejais dar gali būti skirtingi variantai: į vidų (arba į išorę) gali būti nukreiptas tiek mažesnysis, tiek ir didesnysis iš kvadratų, nubraižytų ant statinių.

Visais atvejais teorema įrodoma panašiai, kaip 12 punkte.

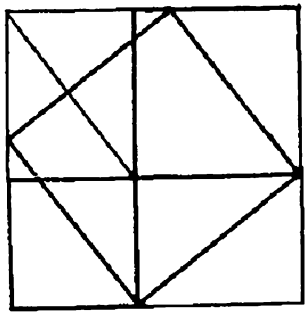
18 p r a t i m a s. Nubraižykite brėžinį, atitinkantį vieną iš 2—6 atvejų, ir, juo remdamiesi, įrodykite Pitagoro teoremą.

Čia bendrais bruožais pateiksime paprastą įrodymą, kuris atitinka 3 atvejį. Tarp kitko, iš esmės jis sutampa su Anaricijaus įrodymu (plg. taip pat 28 brėž.). Vėl api-

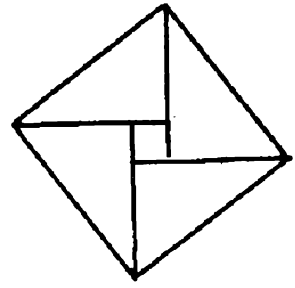
brėšime apie gautą figūrą stačiakampį — šiuo atveju tai bus kvadratas (29 brėž.). Po to, nubrėžę dar vieną pagalbinę įstrižainę, brėžinyje suskaičiuosime 7 trikampius, lygius pradiniam. Iš apibrėžtojo kvadrato dvejopai atėmę po keturis trikampius, vienu atveju gausime statinių kvadratus, o kitu atveju — įžambinės kvadratą.

19 pratimas. 29 brėžinyje įstrižainė nubrėžta iš pagrindinio trikampio stačiojo kampo viršūnės; įrodykite, kad ši įstrižainė yra statmena pagrindinio trikampio įžambinei. (Anaricijus mini, kad šį faktą jau žinojo Heronas.) Kaip bus, jeigu įžambinės kvadratą nukreipsime į išorę?

**14.** Visus šiuos įrodymus labai lengva pateikti „aritmetine" forma. Čia aprašysime vieną panašų „aritmetinį" įrodymą, labai paprastą ir įdomų istoriškai. Jį galima rasti indusų — Basharo (gim. 1114 m.) — geometrijoje su stereotipiniu „žiūrėk"; kiniečiai taip pat žinojo šį įrodymą, gal būt, prieš 1000 metų iki m.e. (plg. § 1, 2 p. ir 1 brėž.). Šiam įrodymui reikalingas 30 brėžinys yra pa-



29 pav.



30 pav.

našus (bent brėžimu) į mums jau žinomą 20 brėžinį. Pradinis statusis trikampis keturis kartus „įdedamas" į kvadratą, nubraižytą ant įžambinės; pastarajame dar lieka mažas kvadratėlis, kurio kraštinė lygi $a-b$ (čia $a$ — didesniojo, o $b$ — mažesniojo statinio ilgis). Taigi kvadrato, nubraižyto ant įžambinės, plotas išreiškiamas šitaip:

$$c^2 = 4\,\frac{ab}{2} + (a-b)^2.$$

Atskliautę iškart gausime:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

20 pratimas. „Geometriniam" įrodymui, remiantis šiuo suskaidymu, pakanka iš 5 dalių, į kurias suskilo įžambinės kvadratas, sudaryti du kitus kvadratus, sudėtus „nuotakos kėde". Išpiaukite tas dalis ir pasistenkite jas sudėti reikiamu būdu.

**15.** Šio paragrafo pabaigoje pateiksime dar tris įrodymus, kurie taip pat yra skaičiavimo pobūdžio, bet smarkiai skiriasi nuo visų ankstesnių. Pirmą iš jų paskelbė 1909 m. anglas Choukinsomas; ar anksčiau jis buvo žinomas — sunku pasakyti.

Statųjį trikampį $ABC$, kurio statusis kampas yra $C$, pasukime 90° kampu taip, kad jis užimtų padėtį $C'CB'$ (31 brėž.). Pratęskime įžambinę $B'C'$ už taško $C'$, kol susikirs su tiese $AB$ taške $D$. Atkarpa $B'D$ bus trikampio $B'AB$ aukštinė. Išnagrinėsime užbrūkšniuotą keturkampį $C'AB'B$. Jį galima išdėstyti į du lygiašonius trikampius $CAC'$ *ir* $CBB'$ (arba į du trikampius $C'B'A$ ir $C'B'B$). Trikampio $CAC'$ plotas lygus $\frac{b^2}{2}$, o trikampio $CBB'$ plotas $-\frac{a^2}{2}$; tuo būdu, keturkampio $C'AB'B$ plotas

$$S=\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Trikampiai $C'B'A$ ir $C'B'B$ turi bendrą pagrindą $c$, o jų aukštinės — $DA$ ir $DB$; todėl keturkampio $C'AB'B$ plotą galime taip išreikšti:

$$S=\frac{c\cdot DA}{2}+\frac{c\cdot DB}{2}=\frac{c}{2}(DA+DB)=\frac{c^2}{2}.$$

Palyginę dvi gautąsias ploto $S$ išraiškas, matome, kad

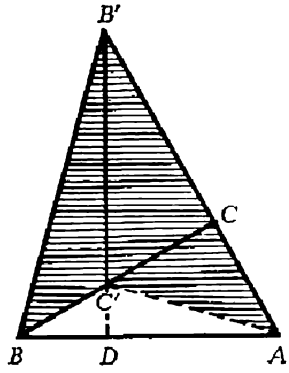
$$a^2+b^2=c^2.$$

**16.** 32 brėžinys mums jau pažįstamas: tai 11 brėžinio apatinė dalis. 32 brėžinyje atvaizduotos figūros plotą $s$ galėtume rasti, išreiškę jį trijų trikampių plotų suma:

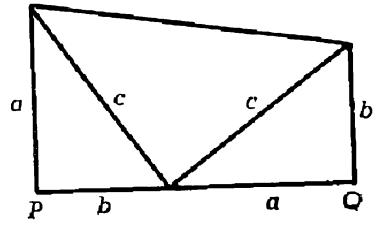
$$s=2\,\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2}.$$

Kitas vertus, ši figūra yra trapecija, todėl

$$s=2\,\frac{a+b}{2}(a+b).$$




31 pav.




32 pav.

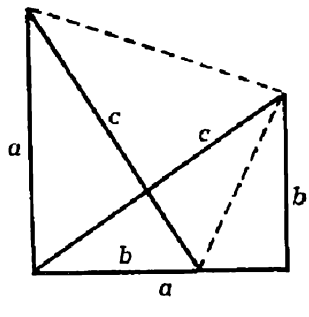
Palyginę pastarąsias išraiškas, rasime:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Šį įrodymą 1882 m. paskelbė Herfildas.

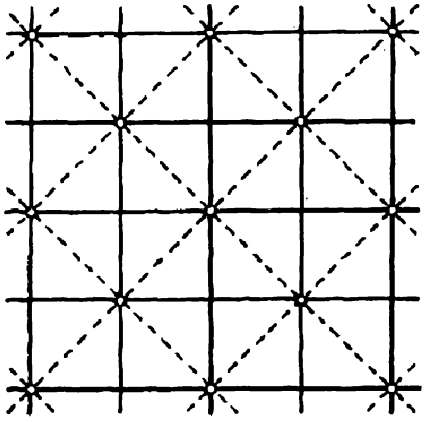
21 pratimas. Pasinaudokite suskaidymu, kurį gausite, jeigu 32 brėžinį papildysite, simetriškai jį atvaizdavę tiesės $PQ$ atžvilgiu.

22 pratimas. Įrodykite Pitagoro teoremą, naudodamiesi 33 brėžiniu ir dvejopai skaičiuodami plotus (Valdheimo būdu).

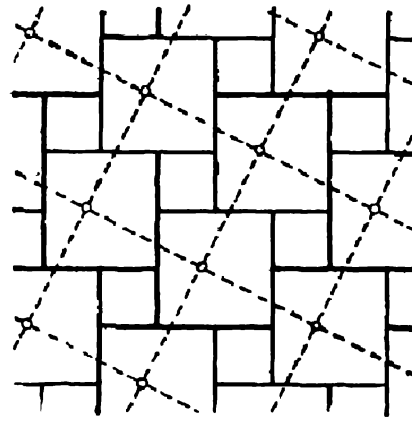



33 pav.

**17.** Kaip nurodė Bernšteinas ir Šoreris, ryšį tarp kai kurių išdėstytųjų įrodymų galima pastebėti, sprendžiant uždavinius apie plokštumos padengimą lygiais daugiakampiais („parketu"). Jeigu statusis trikampis yra lygiašonis ir įrodymui nubraižoma 5 brėžinyje atvaizduota figūra, tai labai lengva pastebėti tokio įrodymo ryšį su galimybe dvejopai padengti plokštumą kvadratų tinklu. Tuo įsitikinsime, žvilgtelėję į 34 brėžinį. Dar nuostabiau, kad parketą galima kloti net iš „nuotakos kėdžių": dėliojant tokias figūras vieną prie kitos, galima užkloti visą plotą be tarpų ir dvigubai už-

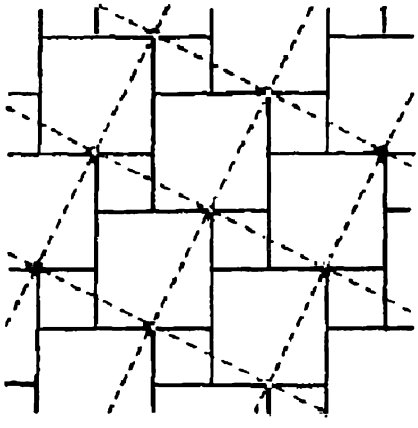


34 pav.

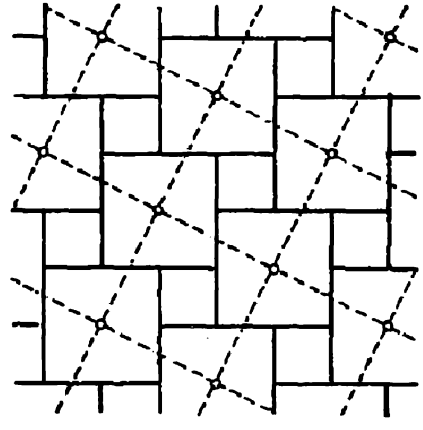


35 pav.

klotų vietų. Šiuo būdu sudėliotą parketą matome 35—37 brėžiniuose; brūkšninėmis linijomis juose parodytas klojimas iš lygių kvadratų. Kvadratų dydžiai šiuose brėžiniuose nesiskiria — skiriasi tik jų išdėstymas: vienu atveju brūkšninių kvadratų viršūnės yra didesniųjų kvadratų centrai, kitu atveju — didesniojo ir mažesniojo statinių galai, o trečiu atveju jie yra netoli didesniųjų kvadratų centrų. Galima brūkšninius kvadratus išdėstyti ir dar kitaip.



36 pav.

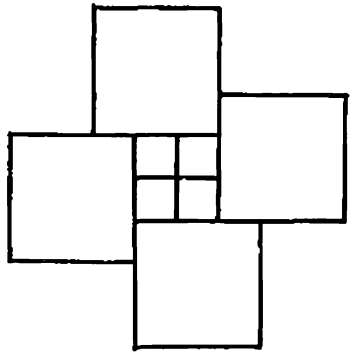


37 pav.

Visais atvejais plokštuma pilnai uždengiama tiek kvadratų tinklu, tiek ir „nuotakos kėdžių" tinklu; taigi kvadrato plotas turi būti lygus „nuotakos kėdės" plotui.

Tačiau galima išgirsti priekaištą, kad toks samprotavimas nėra visai tikslus, nes nagrinėjama tiktai baigtinė plokštumos dalis, o jos ribos negali vienu metu išskirti ir sritį, uždengtą tam tikru kvadratų skaičiumi, ir sritį, uždengtą tuo pačiu „nuotakos kėdžių" skaičiumi. O jeigu tartume, kad plokštuma neaprėžta, tai atsirastų sunkumų, taikant „begalybės sąvoką". Smulkiau šio klausimo negvildensime, tuo labiau, kad kai kurie skaitytojai, gal būt, iš karto nė nesuvokė to trūkumo. Tiktai pastebėsime, kad kuo didesnė plokštuma padengiama kvadratais ir „nuotakos kėdėmis", tuo mažesnį vaidmenį vaidina paklaida, atsirandanti todėl, kad iš esmės čia lyginami skirtingų sričių plotai (tų sričių ribos artimos, bet vis dėlto nesutampa).

Dabar smulkiau išnagrinėsime 35—37 brėžinius. Pirmame iš jų atvaizduotas ant įžambinės nubraižyto kvadrato suskaidymas. Jį jau žinome iš įrodymo, naudojantis 18 brėžinyje nubraižytu „vėjo malūnėliu". 37 brėžinyje matome, kaip atrodo toks pat skaidymas, jeigu linijos, kuriomis suskaidomas ant ilgesniojo statinio nubraižytas kvadratas, susikerta ne jo centre; pagaliau, 36 brėžinys tampriai susijęs su Anaricijaus įrodymu (plg. 23 brėž.). Šoreras, gvildendamas „apmušalų raštus", t. y. įvairias galimybes padengti plokštumą lygiais daugiakampiais, nustatė šio uždavinio ryšį su kitais Pitagoro teoremos įrodymais dalijimo metodu.

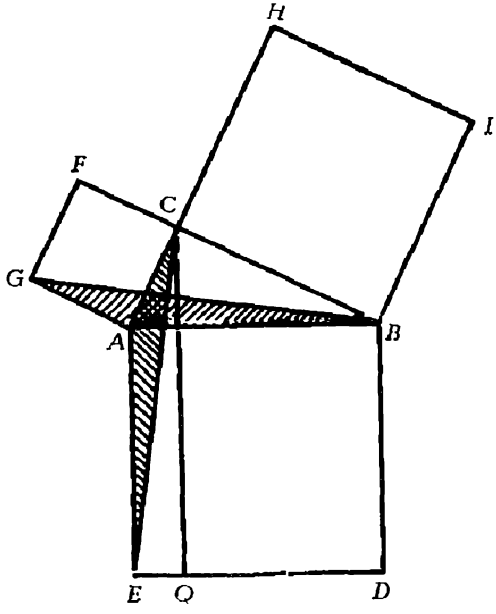


38 pav.

23 p r a t i m a s. 38 brėžinyje atvaizduotos keturios „nuotakos kėdės", sudarančios vieną simetrinę figūrą. Pasinaudokite šia figūra kaip elementu plokštumai padengti ir tokiu būdu įrodykite Pitagoro teoremą.

## § 3. PITAGORO TEOREMA EUKLIDO SISTEMOJE

**1.** Tokį Pitagoro teoremos įrodymą, kokį randame kiekviename elementariosios geometrijos vadovėlyje, išdėstė Euklidas savo „Elementuose"; anot Proklo (Bizantija), jį ir sugalvojo pats Euklidas. <Štai jo esmė.




39 pav.

Sakykime, $ABDE$ — kvadratas, nubraižytas ant stačiojo trikampio $ABC$ įžambinės, o $ACFG$ ir $BCHI$ — kvadratai, nubraižyti ant jo statinių (39 brėž.). Iš stačiojo kampo viršūnės $C$ nuleidžiame statmenį $CP$ į įžambinę ir jį pratęsiame, kol susikerta su kvadrato $ABDE$ kraštine $DE$ taške $Q$; sujungiame taškus $C$ ir $E$, $B$ ir $G$. Aišku, kad $\angle CAE=\angle GAB=\angle A+90°$; todėl trikampiai $ACE$ ir $AGB$ (39 brėžinyje užbrūkšniuoti) yra lygūs (turi po dvi lygias kraštines ir lygų kampą tarp tų kraštinių). Toliau trikampį $AEC$ palyginkime su stačiakampiu $PQEA$; jie turi bendrą pagrindą $AE$ ir lygias aukštines, nuleistas į tą pagrindą (nes $CQ \parallel AE$); vadinasi,

$$S_{PQEA}=2S_{ACE}.$$

Kvadratas $FCAG$ ir trikampis $BAG$ taip pat turi bendrą pagrindą $GA$ ir lygias aukštines, nuleistas į tą pagrindą (nes $BF \| AG$); vadinasi,

$$S_{FCAG} = 2S_{GAB}.$$

Kadangi, be to, trikampiai $ACE$ ir $GBA$ yra lygūs, tai stačiakampis $QPAE$ ir kvadratas $CFGA$ yra lygiapločiai. Analogiškai įrodoma, kad stačiakampis $QPBD$ ir kvadratas $CHIB$ taip pat yra lygiapločiai. O iš to jau išplaukia, kad kvadrato $ABDE$ plotas lygus kvadratų $ACFG$ ir $BCHI$ plotų sumai. Pitagoro teorema įrodyta.>

Pastarajam „įrodymui-spąstams", kaip jį pavadino Šopenhaueris, buvo energingai prieštaraujama. Dar ir dabar daugelis cituoja Šopenhauerio žodžius:

„Banalus, dirbtinis Euklido įrodymas verčia klausti, „kodėl gi taip?", ...kai vien tik pažvelgus į gerai pažįstamą paprastą brėžinį[1], galima daug geriau, negu iš bet kokio įrodymo, suvokti dalyko esmę, įsitikinti įrodinėjamąja savybe ir tuo, kad ši savybė kaip tik susijusi su trikampio kampo statumu.

Ir esant nelygiems statiniams, turi egzistuoti panašus vaizdus, kaip ir bet kurios geometrinės tiesos, įrodymas — jau vien todėl, kad kiekviena tokia tiesa būdavo atskleidžiama visų pirma kaip regima būtinybė, o įrodymas būdavo sugalvojamas jau po to".

Mes jau esame susipažinę su visa eile įrodymų, kurių pasigedo Šopenhaueris, todėl norėtųsi papriekaištauti jam dėl paviršutiniškos pažiūros į šį klausimą: norėdamas jis galėjo sužinoti apie šiuos įrodymus, o ne vien tvirtinti, kad jie „turi egzistuoti".

Antra vertus, ir dabar dažnai galima išgirsti iš matematikų, kad paprasčiausiai Pitagoro teorema įrodoma ne kuriuo nors suskaidymo būdu, o būtent Euklido būdu. Kaip paaiškinti šį nesutarimą?

Grįždami prie Euklido įrodymo, kuris beveik nepakeistas pateikiamas daugelyje vadovėlių*, pirmiausia atkreipsime dėmesį į jo formą. Visuose savo įrodymuose ir brėžiniuose Euklidas apsiriboja „sintezės" stadija, t. y. neišdėsto visų samprotavimų, iš kurių padaro vieną ar kitą išvadą, nepaaiškina, kodėl jis būtent taip, o ne kitaip brėžia pagalbines linijas, kodėl taiko tą, o ne kitą anksčiau įrodytą teoremą. Ir tik pabaigoje skaitytojas

[1] Brėžinys, apie kurį čia kalba Šopenhaueris, atvaizduotas 11 psl. (5 brėž.). Jį, be abejo, žinojo ir Euklidas.

* Taip pat ir A. Kiseliovo vadovėlyje.

pastebi, kad viskas buvo daroma apgalvotai ir kad norimas tikslas pasiektas. Tam, kas, pats neprotaudamas, aklai žingsnis po žingsnio seka Euklidu, šis įrodymas, aišku, turėtų atrodyti nelyginant spąstai. O tas, kam jau teko susidurti su panašiais dalykais, pavyzdžiui, mokantis mokykloje, gali būti visai kitokios nuomonės. Pirmiausia, jis nesinaudoja nuorodomis remtis „teiginiu x", arba „brėžiniu y", kuriomis taip rūpestingai jį supa Euklidas, nes ir pats žino visą atsargą teiginių, kuriais naudojasi autorius. O svarbiausia, kad matematikos mėgėjas, remdamasis jau turimomis žiniomis, gali pats atrasti teoremą ir mėginti be vadovėlio (gal būt, padedamas mokytojo) rasti kelią jai įrodyti. Jam prireiks ne vieno bandymo kaip ir Euklidui, nors „Elementuose" nematyti tų bandymų pėdsakų. Apskritai, įrodinėjant Pitagoro teoremą, kaip ir visus kitus elementarinės matematikos teiginius, reikia stengtis ne tik įrodyti konkretų teiginį, bet ir išmokti įrodinėti.

Kuo pranašesnis Euklido įrodymas? Pirmiausia pastebime, kad Euklidas Pitagoro teoremos nelaiko matematikos „kertiniu akmeniu",— ji nėra viso dėstymo centre, kaip šioje mažoje knygutėje, o tėra viena grandis ilgoje teiginių grandinėje, atskiras faktas plačioje matematinių teoremų sistemoje. Toje grandinėje kiekviena grandis turi būti išvedama iš ankstesnių vien loginiais samprotavimais. Kiekvienas įrodymas turi būti pagrįstas anksčiau įrodytais teiginiais. Kadangi, kuriant geometriją šiuo metodu, būtina kažkokia pradžia, tai pagrindu imami keli neįrodomi teiginiai — vadinamosios aksiomos. Nors šiuolaikinio mokslo požiūriu toje grandinėje ir pastebimos kai kurios silpnos vietos, vienok tai nė kiek nemenkina pačios idėjos*.

Visų pirma, Euklido sistema — tai loginė sistema; akivaizdumui, kuris yra įrodymų skaidymo metodu svarbiausias pranašumas, čia, be abejo, skiriamas tik antraeilis vaidmuo.

Euklido sistemoje Pitagoro teorema užima gana kuklią vietą — ji tėra vienas mokslo apie plotus teiginių. Pradėjęs nuo paprasčiausių daugiakampių figūrų — tri-

* Apie čia trumpai aptartą geometrijos kūrimo deduktyvinį metodą galima paskaityti, pavyzdžiui, P. Raševskio straipsnį «Геометрия и ее аксиоматика», сб. «Математическое просвещение», вып. 5, М., 1960.

kampio ir lygiagretainio,— toliau Euklidas pereina prie šios teoremos. Paprasčiausiu jis laiko tokį įrodymą, kai mažiausiai kartų reikia remtis ankstesnėmis teoremomis. Tiesa, jis turėjo savo žinioje kur kas daugiau teiginių, negu mes, kai kalbėjome § 2 apie įrodymo paprastumą: be sąvokos „lygiapločiai", mes galėjome naudotis tik trikampių lygybės požymiais, tuo tarpu Euklidas galėjo remtis dar daugeliu teoremų iš plotų matavimo teorijos.

Nustatysime, kiek kartų Euklidas, įrodinėdamas Pitagoro teoremą, turėjo remtis ankstesniais teiginiais. Pasitenkinsime tiktai dalimi viso įrodymo — įrodymu, kad kvadratas, nubraižytas ant kurio nors statinio, yra lygiaplotis atitinkamam stačiakampiui (ši Pitagoro teoremos dalis vadinama Euklido teorema).

Vėl grįšime prie 39 brėžinio. Pirmiausia pastebėsime, kad, norint įrodyti, jog kvadratas *CFGA* lygiaplotis stačiakampiui *APQE*, užtenka nubrėžti tik tris pagalbines linijas: *CQ*, *BG* ir *CE*. Įrodymui prireiktų šių teoremų: vieną kartą pirmojo trikampio lygybės požymio ir du kartus — teoremos apie tai, kad, esant lygiems trikampio ir lygiagretainio pagrindams bei aukštinėms, lygiagretainio plotas lygus dvigubam trikampio plotui.

Dabar aišku: jeigu Euklido įrodymą nagrinėtume visos „Elementuose" išdėstytos sistemos rėmuose, tai turėtume pripažinti, kad jis labai paprastas.

2. Euklido įrodymui būdingos dvi aplinkybės: 1) kvadratas, nubraižytas ant įžambinės, suskyla į du stačiakampius, lygiapločius kvadratams, nubraižytiems ant statinių; 2) įrodinėjant stačiakampio ir kvadrato lygiaplotiškumą, naudojamasi pagalbine figūra — specialiai parinktu trikampiu, nagrinėjamu dviejose padėtyse, iš kurių viena gaunama iš kitos, pasukus ją 90° kampu.

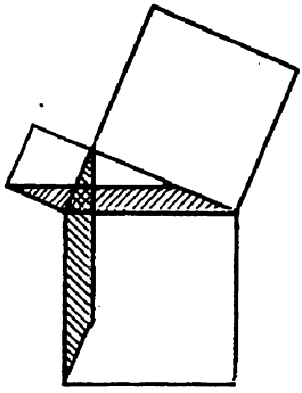
Pastebėsime, kad trikampius galima pakeisti lygiagretainiais — kad tuo įsitikintume, užtenka pažvelgti į 40 brėžinį.

24 p r a t i m a s. Įrodykite, kad 39 brėžinyje užbrūkšniuotų trikampių ilgesnės kraštinės tarpusavyje statmenos. (Šį faktą jau žinojo arabų matematikai.)

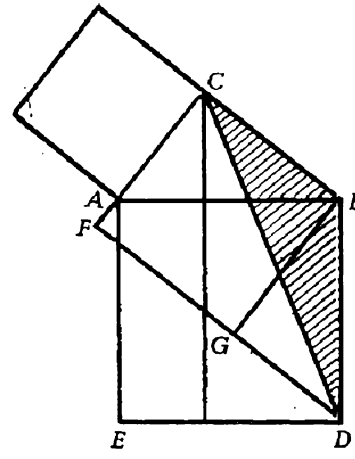
25 p r a t i m a s. 39 brėžinyje užbrūkšniuokite pagalbinius trikampius, kurie naudojami kvadrato *BCHI* ir stačiakampio *BDQP* lygiaplotiškumui įrodyti. Ką galima pasakyti apie tiesių *BG* ir *AI* susikirtimo tašką?

26 p r a t i m a s. Pilnutinai įrodykite teoremą Euklido metodu, naudodami kaip pagalbines figūras ne trikampius, o lygiagretainius. Atvaizduokite taip pat analogiškus lygiagretainius kvadratui, nubraižytam ant didesniojo statinio.

3. 2 paragrafo **13** punkte buvo nurodyta, kokiose šešiose skirtingose padėtyse gali būti trys kvadratai, nubraižyti ant pradinio trikampio kraštinių. Tiek įrodinėjant suskaidymo metodu, tiek ir Euklido metodu, galima pasirinkti bet kurią kvadratų padėtį. Kartais pasiseka įrodymą šiek tiek supaprastinti — tiesa, ne iš esmės. Čia išnagrinėsime vieną atvejį, o kitus paliksime skaitytojui — tebus įrodinėjimo treniruotė.



40 pav.




41 pav.

Sakykime, kvadratas, nubraižytas ant vieno iš statinių (41 brėžinyje tai kvadratas, nubraižytas ant didesniojo statinio), yra atgręžtas į trikampio vidų. Tuomet priešingos statiniui to kvadrato kraštinės tęsinys eis per viršūnę kvadrato, nubraižyto ant įžambinės. Šiuo atveju įrodymas yra visai paprastas, nes pakanka palyginti mus dominančių figūrų plotus su vieno trikampio plotu (41 brėžinyje jis užbrūkšniuotas) — šio trikampio plotas lygus pusei kvadrato ploto ir tuo pačiu metu pusei stačiakampio ploto.

27 p r a t i m a s. Pilnutinai įrodykite, kad atkarpos *FG* tęsinys eina per tašką *D*.

4. Trumpai paminėsime teiginius, kurie Euklido geometrijoje seka po Pitagoro teoremos.

Juos tiktai išvardysime ir paliksime skaitytojui pačiam apgalvoti įrodymus, naudojantis kokiu nors geometrijos vadovėliu. Pirmiausia reikia pastebėti, kad Pitagoro teoremą galima „apgręžti". Dažnai manoma, jog tai — savaime suprantamas dalykas, tačiau iš tikrųjų jis ne toks jau aiškus: jeigu, sakytume, kiekvienas berlynietis yra vokietis, tai dar nereikštų, kad kiekvienas vokietis būtinai turėtų būti berlynietis. Vadinasi, reika įrodyti šitokią teoremą.

*Jeigu kvadratas, nubraižytas ant vienos iš trikampio kraštinių, lygiaplotis sumai kvadratų, nubraižytų ant kitų dviejų jo kraštinių, tai trikampis yra statusis, be to, prieš statųjį kampą yra ta jo kraštinė, ant kurios nubraižytas didžiausias kvadratas* (plg. § 4, 8 p.).

Ši teorema labai lengvai įrodoma, remiantis tokia apibendrintąja Pitagoro teorema.

*Imant bet kurį trikampį, kvadratas, nubraižytas ant bet kurios jo kraštinės, yra lygus sumai kvadratų, nubraižytų ant kitų dviejų kraštinių, pridėjus arba atėmus dvigubą plotą stačiakampio, kurio kraštinės lygios vienai iš pastarųjų trikampio kraštinių ir antrosios projekcijai toje kraštinėje; be to, tas dvigubas stačiakampio plotas atimamas iš kvadratų plotų sumos, jeigu pirmoji trikampio kraštinė yra prieš smailųjį kampą, ir pridedamas prie kvadratų plotų sumos, jeigu ji yra prieš bukąjį kampą* (žr. § 4, 9 punktą).

28 p r a t i m a s. Įrodykite šį teiginį skaičiavimo keliu, remdamiesi Pitagoro teorema; trikampio kraštinės projekcijai rasti panaudokite jo aukštinę, o po to ją išreikškite duotaisiais dydžiais.

5. Dabar įrodysime vadinamąją P a p a u s t e o r e m ą. Euklidas jos dar nežinojo, pirmą kartą ją aprašė P a p u s iš Aleksandrijos (III a.), kurio vardu ji ir pavadinta.

*Imant bet kurį trikampį, lygiagretainis, nubraižytas ant vienos iš jo kraštinių į trikampio vidų taip, kad dvi jo viršūnės yra už trikampio, yra lygiaplotis sumai lygiagretainių, nubraižytų ant kitų dviejų trikampio kraštinių taip, kad jų kraštinės, priešingos trikampio kraštinėms, eitų per pirmojo lygiagretainio viršūnes.*

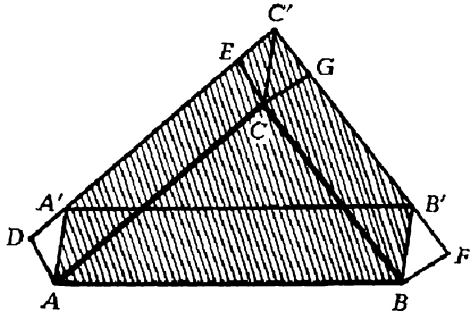
Jeigu pradinis trikampis statusis, o lygiagretainiu, nubraižytu ant įžambinės, imame kvadratą, tai gauname Pitagoro teoremą,— vadinasi, ji yra atskiras Papaus teoremos atvejis.

29 pratimas. Nubraižykite brėžinį, atitinkantį šį atvejį; išnagrinėkite, kaip čia išsidėsto kvadratai ir kuriuo būdu teorema greičiausiai įrodoma.

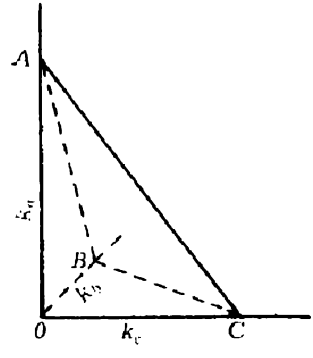
Papaus teoremos įrodymui išnagrinėsime 42 brėžinį, kuriame atvaizduoti lygiagretainiai $ADEC$ ir $BFGC$. Jų išorines kraštines pratęsime, kol susikirs taške $C'$, ir sujungsime tašką $C'$ su trikampio viršūne $C$. Galima įsivaizduoti, kad trikampis $A'B'C'$ gautas, lygiagrečiai pastūmus trikampį $ABC$. Todėl trikampiai $ABC$ ir $A'B'C'$ lygūs. Lygiagretainiai $AA'C'C$ ir $BB'C'C$ lygiapločiai lygiagretainiams $ADEC$ ir $BFGC$, nes jų pagrindai ir aukštinės atitinkamai lygios. Jeigu iš užbrūkšniuotos figūros $AA'C'B'B$ atimtume trikampį $A'B'C'$, tai liktų lygiagretainis $AA'B'B$. Jeigu atimtume trikampį $ABC$, lygiaplotį trikampiui $A'B'C'$, tai liktų lygiagretainių $AA'C'C$ ir $BB'C'C$ suma, kurią galime pakeisti jiems lygiapločių lygiagretainių $ADEC$ ir $BFGC$ suma.

Teorema įrodyta.

30 pratimas. Jeigu statųjį trikampį pastumtume vieno iš statinių kryptimi už stačiojo kampo viršūnės atstumu, lygiu kitam statiniui, tai gautume brėžinį, kuriuo pasinaudodami, galėtume įrodyti atitinkamą teiginį apie kvadratą, nubraižytą ant statinio, remdamiesi Papaus teorema, o jeigu trikampį pastumtume taip, kad įžambinė, eidama per stačiojo kampo viršūnę, nubraižytų kvadratą, tai gautume brėžinį jau žinomam Pitagoro teoremos įrodymui. Patikrinkite.



42 pav.



43 pav.

6. Kyla klausimas, ar yra Pitagoro teoremos analogas stereometrijoje? Taip, yra. Pirmą kartą ją rado, berods, 1622 m. Johanas Fulgaberas iš Ulmo.

Nubrėšime trisienį kampą, kurio visi dvisieniai ir visi plokštieji kampai statūs (43 brėž.). Kiekviename kamba-

ryje yra aštuoni tokie kampai. Kiekvienoje briaunoje pasirinksime po bet kurį tašką $A$, $B$ ir $C$. Trikampio $ABC$ plotą pažymėję trumpumo dėlei $\overline{ABC}$, erdvinę „Pitagoro teoremą" galėsime užrašyti šitaip:

$$\overline{ABC}^2 = \overline{OAB}^2 + \overline{OAC}^2 + \overline{OBC}^2.$$

Šios teoremos įrodymo neaiškinsime, nes jam tereikia paprastų skaičiavimų (žr. 31 pratimą).

31 pratimas. Įrodykite, kad pastaroji lygybė teisinga, išreikšdami visų trikampių plotus briaunų ilgiais $OA=k_a$, $OB=k_b$, $CO=k_c$. Statiesiems trikampiams $OAB$, ... šitai padaryti labai paprasta. Trikampiui $ABC$, visų pirma, reikia apskaičiuoti kraštinių ilgius, naudojantis Pitagoro teorema, o tik po to gautus dydžius įrašyti į Herono trikampio ploto formulę

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

kurioje $p = \frac{a+b+c}{2}$.

7. Visi ankstesni samprotavimai neišeina iš vadinamosios „metrinės geometrijos", pagrįstos lygybės sąvoka, ribų. Tačiau apie tuos pačius faktus galima samprotauti ir kitaip, remiantis judesių grupės sąvoka. Trumpai paaiškinsime to esmę. Užuot įrodinėjus dviejų figūrų plotų lygybę, galima tiesiog sutapdinti tas figūras; toks sutapdinimas yra judesio rezultatas. Du vienas po kito sekančius judesius galima pakeisti vienu judesiu, ir bet kuriam judesiui galima nurodyti atvirkštinį judesį; todėl judesiai sudaro grupę*.

Euklidas naudoja judesių sąvoką labai atsargiai, jei tik galima, jos išvengia (tiesa, ne visada jam tai pavyksta). Šiuolaikinė dėstymo metodika, priešingai Euklidui, siūlo naudoti įrodymams judesio sąvoką, kad geometriniai samprotavimai būtų vaizdesni, išryškėtų šio mokslo ryšys su bandymais.

Su kokiais judesiais jau esame susidūrę? Visų pirma, su šių tipų judesiais: su lygiagrečiais postūmiais, kurie aiškiai matomi 16—17 ir 42 brėžiniuose; su posūkiais, tame tarpe su posūkiais 90° kampu (39 ir 40 brėžiniuose)

---

* Apie čia ir toliau paliestus klausimus žiūrėkite, pavyzdžiui, И. М. Яглом, Геометрические преобразования, I, II, M., 1955—1956. Iš dalies žiūrėkite šios knygos pirmos, antros ir trečios dalies įvadus.

ir 180° kampu (centrine simetrija) (26 brėž.). Centrinė simetrija taip pat atvaizduota 18 ir 30 brėžiniuose.

Lygiagretūs postūmiai ir posūkiai sudaro grupę judesių, kuriuos galima atlikti, neišeinant iš plokštumos. Ašinės simetrijos atveju tenka pasitelkti erdvinius vaizdinius — be šito neįmanoma sutapdinti simetrines dalis. Su tokiais judesiais taip pat jau esame susidūrę kai kuriuose brėžiniuose; jie vieni (be posūkių ir lygiagrečių postūmių) grupės nesudaro.

Skaitytojui patariame savarankiškai pakartoti kai kuriuos jau žinomus Pitagoro teoremos įrodymus kitu būdu, panaudojant judesius figūrų plotams palyginti.

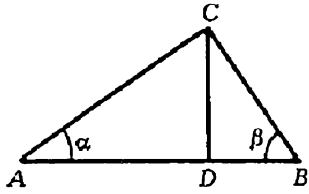
**8.** Baigdami šį paragrafą, paliesime dar vieną klausimą: ar galėtume pagrįsti Pitagoro teoremą, jeigu ją išskirtume iš visos matematinių teiginių loginės sistemos ir nagrinėtume vien kaip fizikinių eksperimentų išvadą: pavyzdžiui, patikrintume, ar tinka šis teiginys visiems statiesiems trikampiams? Paprasčiausia būtų daryti šitaip: nubrėžti kiek galima tiksliau keletą stačiųjų trikampių, išmatuoti jų kraštines (kaip tik įmanoma tiksliau) ir įsitikinti, kad $a^2 + b^2 = c^2$. Jeigu norėtume palyginti pačius kvadratus, tai galėtume juos nubraižyti ant popieriaus su milimetrinėmis padalomis (vadinamojo „milimetrinio" popieriaus) ir suskaičiuoti kvadratinius milimetrus kiekviename iš kvadratų. Galima taip pat nubraižyti kvadratus ant standaus kuo vienodesnio storio popieriaus, juos išpiauti, ir po to, pasvėrus kvadratus tiksliomis svarstyklėmis (pavyzdžiui, kuriomis sveriami laiškai, jei nebūtų geresnių), nustatyti, kad kvadratai, nubraižyti ant statinių, kartu sveria lygiai tiek pat, kiek kvadratas, nubraižytas ant įžambinės.

Aišku, visi tie matavimai niekuomet neįrodys teoremos neginčijamai. Be to, neįmanoma šitaip išmatuoti v i s ų stačiųjų trikampių; kita vertus, matuojant neišvengiama paklaidų, kurių didumas priklauso nuo matuojančio asmens sugebėjimų, nuo braižymo bei matavimo įrankių tikslumo ir pan. <Tiktai deduktyvinis Pitagoro teoremos įrodymas, kaip kad Euklido įrodymas arba įrodymas skaidymo metodu, tikrai įtikina, kad ja išreiškiama priklausomybė tiksli bet kuriuo atveju.>

## § 4. PITAGORO TEOREMA IR MOKSLAS APIE PANAŠUMĄ

1. Stačiajame trikampyje $ABC$ iš stačiojo kampo viršūnės nubrėžkime aukštinę $CD$; tuomet trikampis pasidalys į du trikampius, kurie taip pat bus statieji (44 brėž.). Gautieji trikampiai bus panašūs vienas į kitą ir į pradinį trikampį. Tuo lengvai įsitikiname, remdamiesi pirmuoju trikampių panašumo požymiu:

*Jeigu vieno trikampio du kampai atitinkamai lygūs kito trikampio dviem kampams, tai tokie trikampiai panašūs.*




44 pav.

Iš tikrųjų, matome, kad trikampiai $ABC$ ir $ACD$ turi po statų kampą ir, be to, bendrą kampą $\alpha$, o trikampiai $CBD$ ir $ABC$ — bendrą kampą $\beta$. Mažieji trikampiai taip pat panašūs tarpusavyje, nes kiekvienas iš jų panašus į didįjį trikampį. Beje, tai galima nustatyti ir tiesiogiai.

Kadangi panašių trikampių atitinkamos kraštinės proporcingos, iš pradinio trikampio ir trikampio $ACD$ panašumo išplaukia, kad

$$AD : AC = AC : AB,$$

arba

$$AC^2 = AD \cdot AB.$$

Naudodamiesi proporcijų teorijos terminais, šią lygybę galime perskaityti štai kaip:

*Stačiajame trikampyje kiekvienas statinis yra vidurinis proporcingasis tarp įžambinės ir įžambinės atkarpos, esančios to statinio projekcijos įžambinėje.*

Kalbant plotų teorijos terminais, šia lygybe išreiškiamas faktas, mums jau žinomas iš Euklido įrodymo:

*Kvadratas, nubraižytas ant stačiojo trikampio statinio, lygiaplotis stačiakampiui, kurio kraštinės lygios trikampio įžambinei ir įžambinės atkarpai, esančiai prie nagrinėjamojo statinio.*

Analogiškai, imdami kitą statinį, gausime lygybę

$$BC^2 = DB \cdot AB.$$

Sudėję abi lygybes, gausime:

$$AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + BD \cdot AB = AB\ (AD + BD) = AB^2.$$

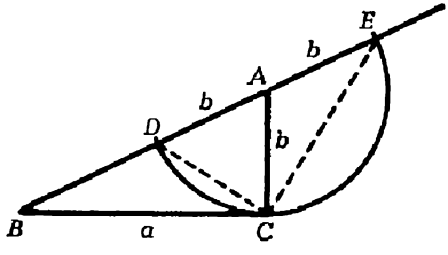
Taip visiškai paprastai įrodėme Pitagoro teoremą, remdamiesi panašumo teorija. Tokį įrodymą pateikė indusas Basharas (gim. 1114 m.) ir šiek tiek vėliau Leonardas Pizantietis (*Practica geometriae*, 1220 m.), dar vėliau nepriklausomai jį sugalvojo anglų matematikas Valisas (1616—1703, Oksfordas); <nūnai šį įrodymą taip pat rasime beveik kiekviename elementarinės geometrijos vadovėlyje>.

32 pratimas. Savarankiškai įrodykite Pitagoro teoremą dar kitu būdu. Sakykime, $ABC$ — statusis trikampis, kurio stačiojo kampo viršūnė $C$. Iš taško $A$, kaip iš centro, spinduliu $b$ nubrėžkime apskritimą; jo susikirtimo su įžambine ir su įžambinės tęsiniu taškus pažymėkime $D$ ir $E$ (45 brėž.). Iš trikampių $BCD$ ir $BCE$ panašumo išplaukia proporcija

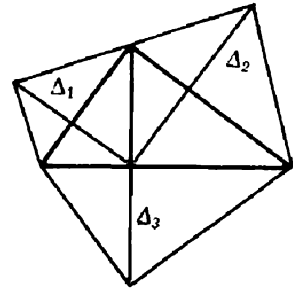
$$a : (c-b) = (c+b) : a,$$

o iš čia — Pitagoro teorema. Galima remtis ir teorema apie liestinės kvadratą; tuomet gauname

$$a^2 = (c+b)\ (c-b).$$




45 pav.




46 pav.

2. Įsivaizduokime, kad trikampis $ACD$ (44 brėž.), simetriškai atvaizduotas statinio $AC$ atžvilgiu, trikampis $DBC$ — statinio $CB$, o trikampis $CAB$ — įžambinės $AB$ atžvilgiu (46 brėž.). Taip gauta figūra skiriasi nuo dažnai pasitaikančios ankstesniuose įrodymuose figūros tuo, kad joje ant pradinio trikampio kraštinių nubraižyti ne

kvadratai, o panašūs statieji trikampiai. Kaip anksčiau kvadratų, nubraižytų ant statinių, plotų suma buvo lygi kvadrato, nubraižyto ant įžambinės, plotui, taip ir šiuo atveju trikampių, nubraižytų ant statinių, plotų suma lygi trikampio, nubraižyto ant įžambinės, plotui; tai aiškiai matyti iš figūros brėžinio (plg. 46 ir 44 brėž.).

Kyla klausimas, ar nebūtų galima, be kvadratų ir šių specialiai parinktų stačiųjų trikampių, nubraižyti ant stačiojo trikampio statinių $a$, $b$ ir įžambinės $c$ kitokias figūras $F_a$, $F_b$ ir $F_c$ taip, kad tų figūrų plotai (juos pažymėsime tomis pačiomis raidėmis, kaip ir figūras) tenkintų lygybę

$$F_a + F_b = F_c.$$

Aišku, ši lygybė nebus teisinga bet kokioms figūroms. Tačiau galima įrodyti šitokį teiginį:

*Jeigu ant stačiojo trikampio statinių ir ant įžambinės nubraižytos bet kokios tarpusavyje panašios figūros $F_a$, $F_b$ ir $F_c$ taip, kad statiniai ir įžambinė yra tų figūrų atitinkamos atkarpos, tai teisinga lygybė*

$$F_a + F_b = F_c.$$

Šią teoremą aprašė Euklidas (6-je savo „Elementų" knygoje), tikriausiai pats ją ir atrado. Taip tvirtina P r o k l a s, kartu nurodydamas, kad dar senovėje šiai Pitagoro teoremos formai buvo pripažinta pirmenybė prieš kitas, nes ji atspindi dalyko esmę. Proklas rašo: „Aš žaviuosi tais, kurie pirmieji teisingai išsprendė šią problemą; tačiau dar labiau vertinu „Elementų" kūrėją, ir ne vien todėl, kad jis surado glausčiausią teoremos įrodymą, bet ir todėl, kad dar bendresnę problemą, aprašytą šeštoje knygoje, jis nesugriaunamai pagrindė mokslo tiesomis".

**3.** Šį teiginį įrodysime, pasinaudodami šia panašumo teorijos teorema, randama kiekviename elementarinės geometrijos vadovėlyje:

*Panašių daugiakampių plotai sutinka kaip atitinkamų kraštinių kvadratai.*

Jeigu panašių daugiakampių, nubraižytų ant stačiojo trikampio statinių $a$ ir $b$ ir įžambinės $c$, plotus pažymė-

sime raidėmis $F_a$, $F_b$, $F_c$, tai, remdamiesi pagalbine teorema, galėsime parašyti:

$$F_a : F_b : F_c = a^2 : b^2 : c^2.$$

Ši proporcija reiškia, kad galima rasti tokį skaičių $k$ (vadinamą proporcingumo koeficientu), jog

$$F_a = ka^2,\ F_b = kb^2,\ F_c = kc^2.$$

Abi lygybės

$$a^2 + b^2 = c^2$$

puses padauginę iš $k$ ir atsižvelgę į ankstesnes lygybes, gausime

$$F_a + F_b = F_c.$$

< O dabar truputį smulkiau aptarsime pastarosios apibendrintos Pitagoro teoremos ryšį su pačia „tikrąja" Pitagoro teorema. Matėme, kad bendresnė lygybė

$$F_a + F_b = F_c$$

išplaukia iš Pitagoro lygybės

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Galime teigti ir atvirkščiai: jeigu, nubraižius ant stačiojo trikampio statinių ir įžambinės bet kokius panašius daugiakampius $F_a$, $F_b$ ir $F_c$, visada teisinga lygybė $F_a + F_b = F_c$, tai ji bus teisinga ir nubraižius ant trikampio kraštinių kvadratus. Vadinasi, apibendrintoji teorema yra ekvivalenti savo atskiram atvejui (Pitagoro teoremai).

Labai nuostabu, kad b e t k u r i s atskiras šios apibendrintos teoremos atvejis yra ekvivalentus pačiai teoremai, o tuo pačiu ir Pitagoro teoremai. Iš tikrųjų, jeigu lygybė

$$F_a + F_b = F_c$$

tinka b e n t **v i e n a m** trejetui tarpusavyje panašių daugiakampių, nubraižytų ant stačiojo trikampio $ABC$ statinių įžambinės taip, kad $AC$, $BC$ ir $AB$ yra atitinkamos tų daugiakampių atkarpos, tai

$$ka^2 + kb^2 = kc^2$$

(koeficiento $k$ reikšmė priklauso nuo to, kokius daugiakampius parinksime — mums konkreti jo reikšmė visai nesvarbi). Tačiau dabar matyti, kad

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

o iš šios lygybės gauname, kad lygybė $F_a + F_b = F_c$ yra teisinga, nubraižius ant stačiojo trikampio kraštinių **bet kokius** panašius daugiakampius, taigi ir kvadratus.

Belieka pastebėti, kad vienam trejetui panašių daugiakampių, nubraižytų ant $AC$, $BC$ ir $AD$,— būtent, statiesiems trikampiams, panašiems į trikampį $ABC$,— lygybė $F_a + F_b = F_c$, be abejo, teisinga. Norint šituo įsitikinti, netgi nebūtinas 46 brėžinys — galima ją gauti tiesiog iš 44 brėžinio (jame statieji trikampiai nubraižyti į tą pačią pusę nuo trikampio $ABC$ kraštinių, kaip ir pats trikampis $ABC$; plg. § 2, **13** p.). Iš čia, kaip matėme, išplaukia, kad ši lygybė teisinga, nubraižius ant trikampio kraštinių bet kokius panašius daugiakampius, taigi ir kvadratus. Šis puikus Pitagoro teoremos įrodymas* (tiesa, jis pagrįstas panašumo teorija) yra pats paprasčiausias!>

4. Dabar susipažinkime su vienu įdomiu **3** punkte išnagrinėtos apibendrintosios Pitagoro teoremos pritaikymu; turime galvoje teiginį, kai kuriuose geometrijos vadovėliuose vadinamą *„Hipokrato mėnuliais"*. Hipokratas iš Chijos (antroji V šimtmečio p.m.e. pusė, Atėnai) gvildeno mėnulių (graikiškai μηνισκος, lotyniškai — *lunula*) ploto matavimus. Mėnuliu jis vadino dalį plokštumos, apribotos dviem apskritimo lankais**; tokios figūros plotas apskaičiuojamas, radus jai lygiaplotį kvadratą. Teiginį apie mėnulių plotus, kurį čia pateiksime, suformulavo ne pats Hipokratas (jis surado tik kai kurių mėnulių plotus). Labiausiai apibendrintą teoremą įrodė arabas Ibn Alchaitamas (miręs 1039 m.). Prancūzų matematikai A. de Lion ir G. Pardis vėl ją suformulavo 1654 ir 1671 m.; ar jie rėmėsi arabų

---

* Žr. Д. Пойя, Математика и правдоподобные рассуждения, М., 1957, стр. 34—37.

** Tiksliai laikantis šio apibrėžimo, Mėnulio piautuvo negalime vadinti mėnuliu, nes jį riboja apskritimo lankas (išorinis Mėnulio kraštas) ir elipsės lankas < gaunamas, projektuojant apskritimą (Žemės šešėlio kraštą) į rutulį (Mėnulį) >.

šaltiniais, ar ne,— nustatyti neįmanoma. Pardis savo veikale *„Elements de Geometrie"* aprašo teoremą bendram atvejui, vadindamas tas figūras *Lunes d'Hippocrate de Scio* — Hipokrato iš Chijos mėnuliais. Euklido „Elementų" knygoje, išleistoje 1745 m., Take-Vistonas taip pat klaidingai priskiria bendrą teoremą Hipokratui.

Jeigu ant stačiojo trikampio įžambinės, kaip ant skersmens, nubraižysime pusapskritimį toje įžambinės pusėje, kurioje yra pats trikampis, tai jis eis per stačiojo kampo viršūnę; šią teoremą graikai priskyrė Talesui iš Mileto, bet ją žinojo jau senovės babiloniečiai. Nubraižę du pusapskritimius ant statinių taip, kaip parodyta 47 brėžinyje, gausime du mėnulius (jie užbrūkšniuoti).

Tarkime, kad $K_a$, $K_b$ ir $K_c$ — pusskritulių, nubraižytų ant statinių ir įžambinės, plotai. Remdamiesi teorema, suformuluota praeitame paragrafe, gauname:

$$K_a + K_b = K_c.$$

33 pratimas. Teiginys, kuriuo tik ką rėmėmės, buvo įrodytas tik daugiakampiams. Ar jis teisingas ir pusskrituliams?

Tą patį rezultatą galime gauti, padauginę abi lygybės

$$a^2 + b^2 = c^2$$

puses iš $\frac{\pi}{8}$. Iš tikrųjų, lygybė

$$\frac{\pi}{8}\, a^2 + \frac{\pi}{8}\, b^2 = \frac{\pi}{8}\, c^2$$

reiškia, kad pusskritulio, kurio skersmuo $c$, plotas lygus kitų dviejų pusskritulių, kurių skersmenys $a$ ir $b$, plotų sumai.

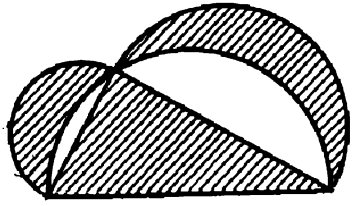
Jeigu iš pusskritulio, nubraižyto ant įžambinės, ir iš pusskritulių, nubraižytų ant statinių, atimtume tas pačias dalis (47 brėžinyje jos neužbrūkšniuotos), tai, remdamiesi tik ką įrodyta teorema, įsitikintume, kad *mėnulių plotų suma yra lygi trikampio plotui.*

5. Grįžkime prie stačiojo trikampio, kurį padalijome į du mažus trikampius (44 brėž.). Sakykime, $h$ — aukštinė, nubrėžta iš stačiojo kampo viršūnės, $p$ ir $q$ — įžam-

binės atkarpos, į kurias ją dalija aukštinė. Kadangi mažieji trikampiai panašūs, tai

$$p : h = h : q, \text{ arba } h^2 = pq.$$

Ši priklausomybė plotų teorijoje nusakoma šitaip:



47 pav.

*Kvadratas, nubraižytas ant stačiojo trikampio aukštinės, lygiaplotis stačiakampiui, kurio kraštinės yra įžambinės atkarpos.*

Šį teiginį galime gauti ir tiesiog iš Pitagoro teoremos, nesinaudodami panašumo teorija. Iš tikrųjų, trikampis $ACD$ — statusis, todėl

$$h^2 = b^2 - p^2;$$

trikampis $BCD$ taip pat statusis, todėl

$$h^2 = a^2 - q^2.$$

Sudėję šias lygybes ir gautoje lygybėje

$$2h^2 = a^2 + b^2 - p^2 - q^2.$$

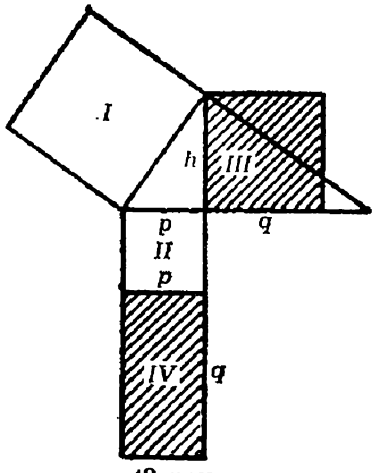
pakeitę statinių kvadratų sumą $a^2 + b^2$ įžambinės kvadratu $c^2 = (p + q)^2$, turėsime

$$2h^2 = (p + q)^2 - p^2 - q^2.$$

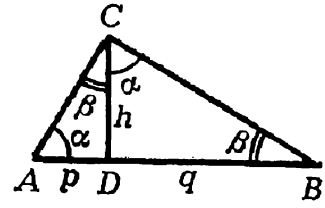
Atskliautę skliaustus, sutraukę panašius narius ir padaliję iš 2, gausime

$$h^2 = pq.$$

Pastaroji lygybė vaizdžiai įrodoma, naudojantis 48 brėžiniu. Pagal Pitagoro teoremą *III* kvadratas, nubraižytas ant aukštinės, yra lygiaplotis *I* kvadratui, nubraižytam ant statinio, minus *II* kvadratas, nubraižytas ant įžambinės atkarpos $p$; be to, jis lygiaplotis *IV* stačiakampiui, nes *I* kvadratas lygiaplotis *II* kvadrato ir *IV* stačiakampio sumai. *IV* stačiakampio kraštinės yra atkarpos $p$ ir $q$.

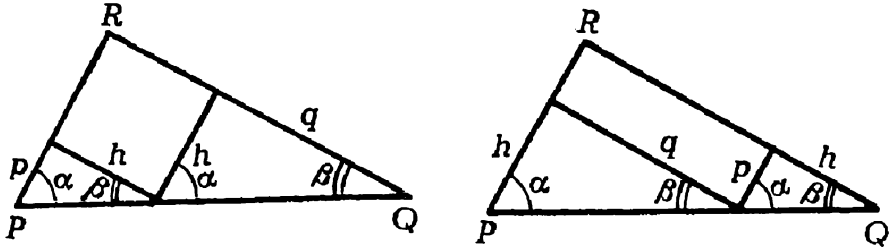



48 pav.




49 pav.

Labai gražų teoremos apie aukštinę įrodymą paskelbė K. Meitcneris. Du mažus stačiuosius trikampius (49 brėž.), į kuriuos aukštinė dalija didįjį trikampį, perbraižykime taip, kad jų įžambinės būtų viena kitos tęsinys. Tai galima padaryti dviem būdais (50 ir 51 brėž.). 50 brėžinyje gautoji figūra papildyta iki stačiojo trikampio kvadratu, kurio plotas $h^2$, o 51 brėžinyje — stačiakampiu, kurio plotas $pq$. Tačiau gautieji trikampiai yra lygūs; vadinasi, $h^2 = pq$.




50, 51 pav.

6. Išnagrinėkime dar vieną teoremos apie aukštinę išvadą. Atkarpą $c$ padalykime į dalis $p$ ir $q$ ir ant kiekvienos iš trijų atkarpų $p$, $q$, $c$, kaip ant skersmens, nubraižykime po pusapskritimį (52 brėž.). Tokiu būdu gautoji figūra, apribota trimis pusapskritimiais (52 brėžinyje ji užbrūkšniuota), dėl panašumo į batsiuvio kreivą peilį buvo pavadinta arbelonu*. Archimedas įrodė

* Nuo graikų žodžio αρβελωσ — batsiuvio peilis.

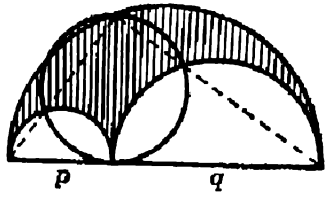
keletą teoremų apie tokią figūrą; mes panagrinėsime tik vieną iš jų. Į didįjį pusapskritimį įbrėšime statųjį trikampį; $c$ yra to trikampio įžambinė, o $p$ ir $q$ — jos atkarpos. Tuomet *skritulys, nubrėžtas ant to trikampio aukštinės, kaip ant skersmens, lygiaplotis arbelonui.* Šitai įrodinėjant, patogu remtis tarpine lygybe, kuria naudojomės praeitame punkte:

$$2h^2 = c^2 - p^2 - q^2 .$$

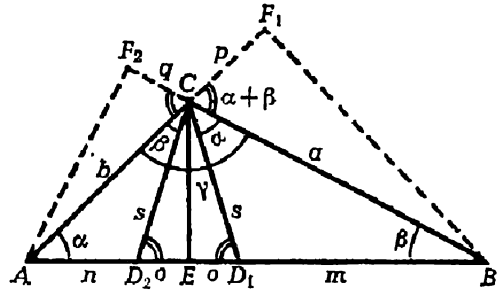
Padauginę abi jos puses iš $\frac{\pi}{8}$, gausime,

$$\frac{\pi h^2}{4} = \frac{\pi c^2}{8} - \frac{\pi p^2}{8} - \frac{\pi q^2}{8} .$$

Kairioji šios lygybės pusė reiškia plotą skritulio, kurio skersmuo lygus aukštinei, o dešinioji — arbelono plotą.




52 pav.




53 pav.

**7.** Dabar pritaikysime metodą, kuriuo naudojomės paragrafo pradžioje, bet kokiems trikampiams (nebūtinai statiesiems!) ir tokiu keliu pašalinsime vieną netikslumą, padarytą praeitame paragrafe. Tarkime, kad trikampyje $ABC$ kampas $\gamma$ yra bukas (53 brėž.). Šio trikampio viduje ant kraštinių $a$ ir $b$ nubraižykime du mažus trikampius, panašius į pradinį. Tai galime padaryti, atidėję prie viršūnės $C$ nuo kraštinės $AC$ kampą $\beta$, nuo kraštinės $BC$ — kampą $\alpha$; trečiosios ieškomųjų trikampių viršūnės bus taškai $D_1$ ir $D_2$, kuriuose tokiu būdu gautos kraštinės susikerta su pradinio trikampio kraštine $AB$. Kadangi kampas $\gamma$ — bukas, o $\alpha + \beta$ — smailus, tai gauname lygiašonį trikampį $CD_1D_2$, kurio $\angle CD_1D_2 = \angle CD_2D_1 = \alpha + \beta$. Šio trikampio aukštinė sutampa su pradinio trikampio aukštine $CE$, o abiejose jo

pusėse yra trikampiai $D_1CB$ ir $D_2AC$, panašūs vienas į kitą ir į pradinį trikampį. Trumpumo dėlei pažymėję

$$AD_2=n,\ D_2E=ED_1=o,\ D_1B=m,\ CD_1=CD_2=s$$

ir remdamiesi trikampių panašumu, galime užrašyti tris proporcijas:

$$s:n=m:s,\ (1)\quad a:m=c:a,\ (2)\quad b:n=c:b,\ (3)$$

arba, perėję prie sandaugų, tris lygybes:

$$s^2=mn,\ (4)\quad a^2=mc,\ (5)\quad b^2=nc.\ (6)$$

Kad šios lygybės teisingos, rekomenduojame skaitytojams dar kartą įsitikinti geometriškai, nubraižius kvadratus ir stačiakampius. Tuomet dar aiškiau matysime, kad čia susidūrėme su Pitagoro teoremos apibendrinimu.

Iš (5) ir (6) lygybių išplaukia, kad

$$a^2+b^2=c\,(m+n).$$

Pridėję prie dešinės pusės narį $2oc$ ir jį atėmę (atkreipkite dėmesį į šią mažą gudrybę!), gausime

$$a^2+b^2=c\,(m+n+2oc)-2oc.$$

Narys, esantis skliaustuose, lygus $c$. Tuo būdu, galima parašyti lygybę:

$$c^2=a^2+b^2+2oc.\qquad(7)$$

Tai — pamokantis Pitagoro teoremos apibendrinimas. Jeigu $\gamma=90°$, iš karto pastebime, kad $o=0$, ir grįžtame prie įrodymo, su kuriuo susipažinome šio paragrafo pradžioje.

34 pratimas. Analogiškai įrodykite teoremą, kai kampas $\gamma$ smailus.

8. Prie jau žinomų faktų prijungę 34 pratimo rezultatą, vėl įrodysime teiginį, atvirkščią Pitagoro teoremai (žr. § 3, 4 p.): jeigu $c^2=a^2+b^2$, tai kampas $\gamma$ — statusis. Iš tiesų, jeigu būtų ne taip, kampas $\gamma$ galėtų būti bukas arba smailus. Pirmu atveju būtų teisinga (7) lygybė, kurioje $o\neq 0$, antruoju atveju — jai artima lygybė, kuri išvedama, atliekant 34 pratimą; joje taip pat $o\neq 0$. Abiem atvejais gauname prieštaravimą sąlygai $c^2=a^2+b^2$.

9. Naudodamiesi papildomu brėžiniu, parodysime, kad (7) lygybė yra kitaip išreikšta apibendrintoji Pitagoro teorema (apie ją jau užsiminėme § 3, 4 p.). Pavyzdžiui, iš trikampio $ABC$ viršūnės $B$ nuleiskime statmenį į kraštinę $b$ (arba į jos tęsinį, jeigu $\gamma$ yra bukas) ir statmens pagrindą pažymėkime raide $F_1$. Tuomet $\triangle BF_1C \sim \triangle CED_1$ nes jų atitinkami kampai prie $C$ ir $D_1$ yra lygūs. (Galima nuleisti statmenį ir iš viršūnės $A$ — brėžinyje ir tai parodyta.) Kraštinės $a$ projekciją $CF_1$ kraštinėje $b$ pažymėkime $p$; kitame trikampyje atkarpa $CF_2 = q$ yra kraštinės $b$ projekcija kraštinėje $a$.

Trikampiai $BF_1C$ ir $CED_1$ panašūs, todėl

$$o : s = p : a, \text{ arba } o = \frac{sp}{a}.$$

Prisiminę anksčiau nagrinėtus tris panašius trikampius ir pasinaudoję tuo, kad $\triangle ABC \sim \triangle ACD_2$, gauname dar vieną proporciją:

$$s : b = a : c, \text{ arba } \frac{s}{a} = \frac{b}{c}.$$

Tuo būdu, (7) lygybės papildomą narį galima išreikšti šitaip:

$$2oc = 2\frac{sp}{a}\, c = 2\frac{b}{c}\, pc = 2bp,$$

o pačią (7) lygybę —

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2bp.$$

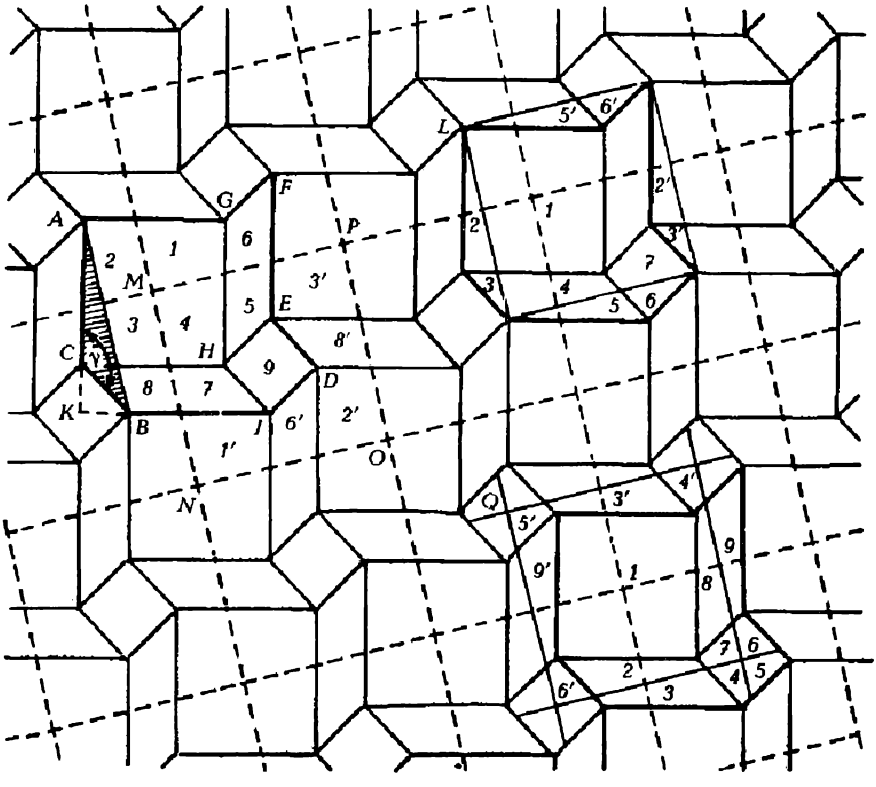
Nuleidę statmenį iš viršūnės $A$, gautume kitą pagalbinį trikampį, o iš jo — lygybę

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2aq.$$

Taip išreiškiama apibendrintoji Pitagoro teorema, kai kampas $\gamma$ yra bukas.

35 p r a t i m a s. Įrodykite atitinkamą lygybę, kai kampas $\gamma$ yra smailus.

10. E. D i n t c l i s nurodė, kad apibendrintąją Pitagoro teoremą taip pat galima įrodyti, nagrinėjant parketo klojimą (t. y. plokštumos padengimą daugiakampiais).




54 pav.

Imkime bukąjį trikampį *ABC* (54 brėž.), kuriame bukas kampas yra prie viršūnės *C*, o kraštinės prie jo — $CB = a$ ir $CA = b$. Kaip parketo brėžinio pasikartojantį elementą imsime aštuonkampį *ACBIDEFG*, sudarytą iš dviejų kvadratų *ACHG* ir *HIDE*, kurių kraštinės atitinkamai lygios trikampio kraštinėms *b* ir *a*, ir dviejų lygių lygiagretainių *CBIH* ir *HEFG* su tomis pačiomis kraštinėmis *b* ir *a*. Jeigu ant šio brėžinio uždėtume kvadratinį tinklą taip, kad jo mazgai sutaptų su didžiųjų kvadratų centrais ir kad tiesės *MN* ir *AB* būtų lygiagrečios, tai galėtume įrodyti, kad, pavyzdžiui, kvadratą *MNOP* ir aštuonkampį parketo brėžinio elementą galima sudaryti iš tų pačių dalių *1*, *2*, ..., *9*, arba joms lygių dalių *1′*, *2′*, *3′*, *4*, *5*, *6′* *7*, *8′*, *9*.

Kadangi $AB = MN$, tai iš čia išplaukia, kad

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2CH \cdot CK,$$

o tai ir yra apibendrintoji Pitagoro teorema.

36 pratimas. Šį įrodymo metodą galima pritaikyti ir tuo atveju, kai trikampis *ABC* yra smailusis, bet tada brėžinys bus sudėtingesnis, nes figūros iš dalies dengs viena kitą. Pasistenkite vis dėlto nugalėti šį sunkumą!

37 pratimas. Kaip ir įrodinėdami paprastą (ne apibendrintą) Pitagoro teoremą, čia kvadratinį tinklą galime pasirinkti laisvai ir gauti įvairius suskaidymus. 54 brėžinyje atvaizduotos dvi naujos tinklo padėtys. Pirmu atveju kvadrato viršūne imamas taškas *L*, esantis tokioje pat padėtyje kaip ir *A*; antru — mažojo kvadrato centras. Į kokias dalis suskaidome kvadratą, kurio plotas $c^2$?

11. Jeigu samprotautume, remdamiesi ne vien panašumo teorija, bet ir iš tos teorijos išaugusia trigonometrija, tai gautume dar vieną apibendrintos Pitagoro teoremos formą:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Iš tikrųjų, trikampio kraštinės $a$ projekcija kraštinėje $b$ lygi $a \cos \gamma$, jeigu kampas $\gamma$ smailus, arba — $a \cos \gamma$, jeigu $\gamma$ bukas. Abiem atvejais ankstesnė lygybė bus teisinga; trigonometrijoje ji vadinama kosinusų teorema.

Remdamiesi trigonometrija, galime lengvai įrodyti teoremą, kurią atrado <tarp kitko, vargu ar pirmas!> vokiečių moksleivis I. Kleinas. 55 brėžinyje atvaizduotas bet koks trikampis *ABC*, ant kurio kraštinių $a$, $b$ ir $c$ nubraižyti kvadratai. Teorema tvirtina, kad užbrūkšniuotieji figūroje trikampiai yra lygiapločiai. Tai galima įrodyti iš karto, naudojantis trikampio ploto formule

$$s = \frac{1}{2} ab \sin \gamma,$$

prisiminus, kad $\sin \gamma = \sin (180° - \gamma)$.

38 pratimas. Pilnai įrodykite 11 punkte minimą teoremą.

12. Atkarpos, kurios turi kryptį, vadinamos vektoriais. Juos žymėsime juodesnėmis lotyniškomis raidėmis. Jeigu nubraižytume lygiagretainį, kurio kraštinės yra du duotieji vektoriai, tai to lygiagretainio įstrižainė būtų vektorius, vadinamas tų vektorių suma. Jeigu $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$, tai $\mathbf{a}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$. Dviejų vektorių *skaliarinė sandauga* yra lygi jų ilgių ir tarp jų esančio kampo kosinuso sandaugai. Tuo būdu, skaliarinės sandaugos absoliutinis didumas reiškia plotą stačiakampio, sudaryto iš

vieno vektoriaus ir kito vektoriaus projekcijos jame (arba jo tęsinyje). Jeigu vektoriai **a** ir **b** sudaro kampą $\gamma$, tai

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cos \gamma.$$

Čia $a$ ir $b$ yra vektorių **a** ir **b** ilgiai.

Jeigu vektoriai tarpusavyje statmeni, tai

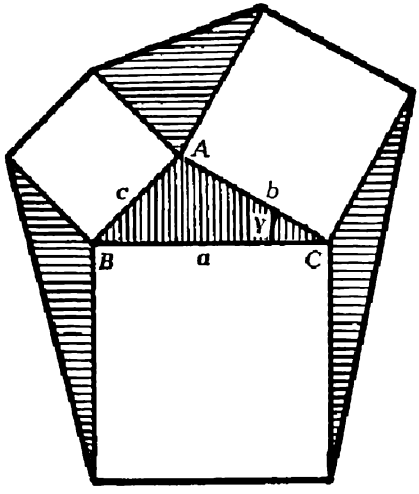
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0,$$

nes $\cos 90^\circ = 0$. Jeigu $\gamma = 0$, tai $\mathbf{ab} = ab$; taigi

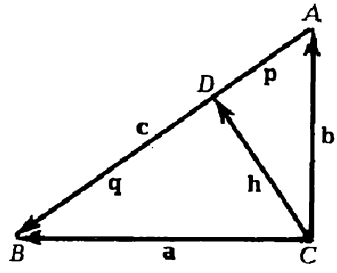
$$\mathbf{a}^2 = a^2.$$

Skaliarinei sandaugai tinka distributyvumo dėsnis:

$$\mathbf{m}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{ma} + \mathbf{mb}.$$




55 pav.




56 pav.

Sakykime, $ABC$ — statusis trikampis (56 brėž.), kurio stačiojo kampo viršūnė yra $C$, o kraštinės — vektoriai $\mathbf{a} = CB$, $\mathbf{b} = CA$, $\mathbf{c} = AB$. Tuomet teisinga vektorinė lygybė

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a},$$

arba

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}.$$

Abi puses pakėlę kvadratu, gausime

$$\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{ab}.$$

Kadangi $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, tai $\mathbf{ab} = 0$. Vadinasi,

$$\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2, \text{ arba } c^2 = a^2 + b^2.$$

Vėl įrodėme Pitagoro teoremą.

<Jeigu trikampis $ABC$ — bet koks (nebūtinai statusis), tai iš formulės

$$\mathbf{c}^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{ab}$$

gauname

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

t. y. kosinusų teoremą, apibendrinančią Pitagoro teoremą.>

Raide $\mathbf{h}$ pažymėkime vektorių, nubrėžtą iš stačiojo trikampio viršūnės $C$ statmenai įžambinei $AB = c$. Sakykime, kad vektoriaus $\mathbf{h}$ galas $D$ yra trikampio kraštinėje $AB$ ir dalija tą kraštinę į dvi atkarpas $DA$ ir $DB$; pažymėkime $DA = \mathbf{p}$ ir $DB = \mathbf{q}$. Tuomet

$$\mathbf{ab} = 0, \ \mathbf{ph} = 0, \ \mathbf{qh} = 0, \ \mathbf{a} = \mathbf{q} + \mathbf{h}, \ \mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{h},$$

todėl

$$\mathbf{ab} = (\mathbf{q} + \mathbf{h})(\mathbf{p} + \mathbf{h}) = \mathbf{pq} + \mathbf{ph} + \mathbf{qh} + \mathbf{h}^2.$$

Vadinasi,

$$\mathbf{pq} + \mathbf{h}^2 = 0.$$

Kadangi vektoriai $\mathbf{p}$ ir $\mathbf{q}$ yra priešingų krypčių, tai

$$h^2 = p \cdot q$$

(kaip paprastai, raidėmis $p$, $q$, $h$ čia pažymėti vektorių $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{h}$ ilgiai). Taigi vėl įrodėme teoremą apie stačiojo trikampio aukštinės kvadratą.

## § 5. SKAIČIAVIMAI, REMIANTIS PITAGORO LYGYBE

1. Kai, žinant vienus geometrinius dydžius, tenka apskaičiuoti kitus ir remiamasi Pitagoro lygybe

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

iš karto susiduriama su kvadratinėmis šaknimis. Pradėsime nuo vienos labai svarbios pastabos apie tokias šaknis. Aišku, kad tokios išraiškos, kaip $\sqrt{2}$ arba $\sqrt{3}$, negali būti sveikieji skaičiai. Bet ar nebus jos trupmenos? Kad iš karto galėtume paneigti tokią prielaidą, išnagrinėkime, pavyzdžiui, $\sqrt{2}$. Tarkime, kad

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q},$$

o trupmena $\frac{p}{q}$ — nesuprastinama. Pakėlę abi lygybės puses kvadratu ir išsivadavę nuo vardiklio, gausime

$$2q^2=p^2;$$

iš čia išplaukia, kad $p$ — lyginis skaičius. Bet tuomet $p^2$ turi būti dalus iš 4. Suprastinę abi puses iš 2, pastebėsime, kad $q^2$, tuo pačiu ir $q$, turi būti lyginiai. Tačiau tai prieštarauja teiginiui, kad trupmena $\frac{p}{q}$ — nesuprastinama. <Apskritai, jeigu kvadratinė šaknis iš sveikojo skaičiaus nėra sveikasis skaičius, tai ji negali būti ir racionalusis skaičius.>

39 pratimas. Įrodykite, kad $\sqrt{3}$ negali būti lygi trupmenai $\frac{p}{q}$.

2. Pateiksime keletą pavyzdžių, kuriuos sprendžiant prireikia Pitagoro teoremos. Beje, anaiptol nemėginsime sudaryti išsamaus ar kuria nors prasme pilno sąrašo visų uždavinių, kuriuos sprendžiant pritaikomas praktiškai minimasis teiginys — vargu ar tai būtų įmanoma. Jeigu ignoruotume trigonometriją, tai iš viso negalėtume pakankamai aiškiai nurodyti Pitagoro lygybės taikymo srities.

Čia nespręsime tokių uždavinių, kokius sprendė, kaip rašo jumoristinis žurnalas, vienas matematikos profesorius. Tam profesoriui buvo pasiūlyta lova, kuri jam pasirodė per maža. Profesorius išmatavo jos ilgį $a$ bei plotį $b$ ir apskaičiavo milimetro tikslumu, kad jo paties ūgis mažesnis, negu $\sqrt{a^2+b^2}$. Įsitikinęs matematikos, ypač Pitagoro teoremos, nauda, profesorius atsigulė į lovą *įstrižai.*

3. Pirmiausia, pasinaudodami Pitagoro teoremos teikiamomis galimybėmis, apskaičiuosime kai kurių mums žinomų figūrų atkarpų ilgius.

*Kvadrato*, kurio kraštinė $a$, *įstrižainę* $d$ galime laikyti įžambine stačiojo lygiašonio trikampio, kurio statinis $a$. Todėl

$$d^2=2a^2, \text{ o iš čia}$$

$$d=\sqrt{2}\,a.$$

40 pratimas. Standartinio formato braižybos lapų plotis santykiuoja su ilgiu taip, kaip kvadrato kraštinė su įstrižaine. Lapo plotis 420 mm. Raskite jo ilgį.

41 pratimas. Iš duoto formato lapo gaunami 2 mažesni lapai, dalijant jo didesniąją kraštinę pusiau. Surašykite šitaip gaunamus naujus standartinius formatus, jeigu lapo matmenys yra 841 × 1188.

*Stačiakampio*, kurio kraštinės $a$ ir $b$, *įstrižainė* $d$ skaičiuojama, kaip ir įžambinė stačiojo trikampio, kurio statiniai $a$ ir $b$. Turime

$$d^2=a^2+b^2,$$

taigi

$$d=\sqrt{a^2+b^2}.$$

*Lygiakraščio trikampio*, kurio kraštinė $a$, *aukštinę* $h$ galima apskaičiuoti kaip statinį stačiojo trikampio, kurio įžambinė yra $a$, o kitas statinis $\frac{a}{2}$ (aišku, vietoj žodžio „aukštinė" šiuo atveju galime sakyti „pusiaukampinė", arba „pusiaukraštinė", arba „statmuo, nubrėžtas per kraštinės vidurį"). Tuo būdu, turime

$$a^2=h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

arba

$$h^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\,a^2.$$

Iš čia

$$h=\frac{1}{2}\,\sqrt{3}\,a.$$

Dar vienas — paskutinis — pavyzdys iš planimetrijos! 57 brėžinyje atvaizduota trapecija $ABB'A'$ su dviem stačiaisiais kampais prie viršūnių $A$ ir $B$. Sakykime,

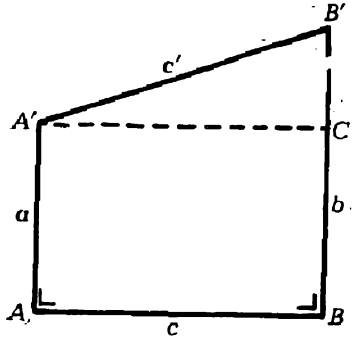
$AA'=a$, $BB'=b$, $AB=c$ ir $A'B'=c'$. Tokiu atveju kartais sakoma, kad atkarpa $AB$ yra atkarpos $A'B'$ p r o j e k c i j a. Kraštines $c$ ir $c'$ dvejopai išreikšime likusiomis kraštinėmis. Tiesė $A'C$, nubrėžta per $A'$ lygiagrečiai $AB$, atkerta statųjį trikampį $A'CB'$, kurio įžambinė lygi $c'$, o statiniai $c$ ir $(b-a)$. Vadinasi,

$$c' = \sqrt{c^2+(b-a)^2}$$

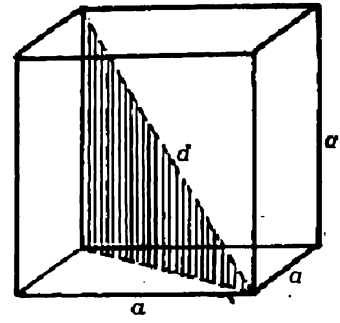
ir

$$c = \sqrt{c'^2-(b-a)^2}.$$

Naudodamiesi šiomis formulėmis, galime rasti atkarpą, žinodami jos projekciją tiesėje, ir atvirkščiai, jeigu, be to, žinome tos atkarpos galų atstumų nuo tiesės skirtumą.



57 pav.



58 pav.

4. Pitagoro teorema pritaikoma ne tik planimetriniams skaičiavimams. Dabar panagrinėsime keletą paprasčiausių erdvinių kūnų. 58 brėžinyje atvaizduotas *kubas*, kurio viduje nubrėžta įstrižainė $d$; kartu ji yra brėžinyje užbrūkšniuoto stačiojo trikampio įžambinė. Trikampio statiniai yra kubo briauna ir įstrižainė kvadrato, sudarančio kubo pagrindą (kaip buvo nurodyta ankstesniame punkte, šios įstrižainės ilgis lygus $\sqrt{2}\,a$). Iš čia turime:

$$d^2 = a^2+(\sqrt{2}\,a)^2,$$

$$d^2 = a^2+2a^2 = 3a^2$$

ir pagaliau

$$d = \sqrt{3}\,a.$$

Panašiai galime samprotauti ir apie „plytą" (stačiakampį gretasienį), kurios briaunos yra $a$, $b$ ir $c$; gautume įstrižainės išraišką

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

42 pratimas. Išveskite pastarąją stačiojo gretasienio įstrižainės ilgio formulę.

Išnagrinėsime *piramidę*, pavyzdžiui, tokią, kurios pagrindas yra kvadratas, o aukštinė eina per to kvadrato centrą (taisyklingąją keturkampę piramidę). Tarkime, kad kvadrato kraštinė $a$, o piramidės aukštinė $h$. Pirmasis klausimas: kam yra lygus piramidės šoninių briaunų ilgis $s$? Šios briaunos (59 brėž.) yra įžambinės stačiųjų trikampių, kurių vienas statinis — aukštinė $h$, o kitas — kvadrato įstrižainės pusė, t. y. $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a$. Todėl

$$s = \sqrt{h^2 + \frac{1}{2}\,a^2}.$$

Po to galime apskaičiuoti šoninių sienų aukštinę $h_1$. Stačiajame trikampyje, kuriame vienas iš statinių lygus $h$, o kitas $\frac{a}{2}$, aukštinė $h_1$ bus įžambinė. Todėl

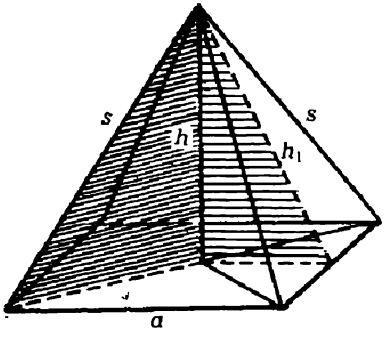
$$h_1 = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}\,a^2}.$$

43 pratimas. Apskaičiuokite piramidės šoninį paviršių.

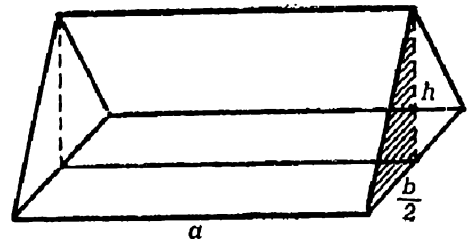
**5.** Gal būt, kai kuriems skaitytojams šie Pitagoro teoremos pritaikymai atrodo negyvenimiški, vien teoriniai. Tai — didelė klaida! Jeigu, pavyzdžiui, projektuotume keturkampės piramidės formos bokšto stogą (arba palapinės stogelį), tai pirmiausia tektų apskaičiuoti, kokio ilgio reikia daryti šonines briaunas, kad duotojo ploto statinys būtų uždengtas nurodyto aukščio stogu; o šoninio paviršiaus plotas turi dominti, pavyzdžiui, stogdengį, kai jam tenka apskaičiuoti darbų kainą.

Pridursime, kad stogo plotą galima apskaičiuoti ir paprasčiau, pasinaudojus viena labai nesudėtinga taisykle, tinkama visais atvejais, kai stogo šlaitai, kiek jų bebūtų, yra vienodai nuolaidūs. Štai toji taisyklė: norint apskaičiuoti stogo plotą, reikia dengiamąjį plotą padau-

ginti iš kurios nors gegnės ilgio ir gautąją sandaugą padalyti iš tos gegnės projekcijos į dengiamąjį plotą. O kaip „gegnę" pavadintų geometras?




59 pav.

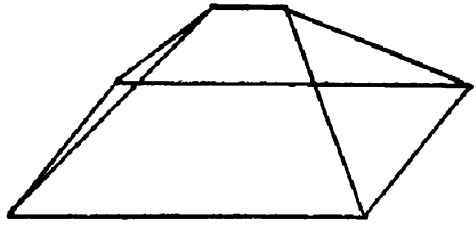



60 pav.

44 pratimas. Patikrinkite minėtą taisyklę, kai stogas dvišlaitis (60 brėž.); piramidinis (59 brėž.); keturšlaitis (61 brėž.); kūginis.

45 pratimas. Įrodykite pastarąjį teiginį bendru atveju.

46 pratimas. Kaip suformuluotume tą pačią taisyklę, jeigu vietoj gegnės ilgio santykio su jos projekcija imtume stogo nuolydį?

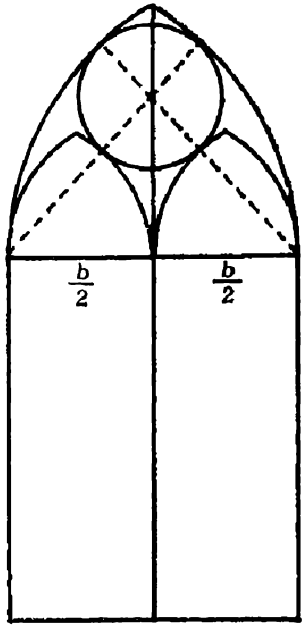


61 pav.

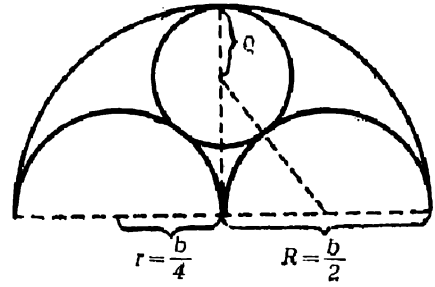
6. Gotiškojo ir romaniškojo stiliaus pastatuose langų viršutinės dalys būna papuoštos akmens briaunomis, kurios ne tik juos puošia, bet ir sustiprina. Štai, 62 brėžinyje atvaizduotas paprastas gotiško stiliaus langas. Šį briaunų ornamentą sudaryti labai paprasta: kaip matyti brėžinyje, nesunku rasti šešių apskritimų lankų centrus; jų spinduliai tokie: išorinių lankų lygūs lango pločiui $b$, o vidinių — pusei to pločio, t. y. $\frac{b}{2}$. Belieka apskritimas, kuris liečia keturis lankus. Kadangi jis yra tarp dviejų koncentriškų apskritimų, tai jo skersmuo lygus atstumui tarp tų apskritimų, t. y. $\frac{b}{2}$, vadinasi, spindulys lygus $\frac{b}{4}$, — taigi aiški ir jo centro padėtis.

47 pratimas. Nubraižykite tą lango ornamentą masteliu 1:50, naudodamiesi skriestuvu ir liniuote. Lango plotis lygus $b=3$ m.

7. Išnagrinėtame pavyzdyje spindulius radome visai lengvai. Sprendžiant kitus panašius pavyzdžius, gali prireikti ir kai ką apskaičiuoti; parodysime, kaip tokiems uždaviniams pritaikoma Pitagoro teorema. Romaniškoje architektūroje dažnai sutinkame motyvą, atvaizduotą 63 brėžinyje. Jeigu raide $b$, kaip ir anksčiau, žymėsime




62 pav.




63 pav.

lango plotį, tai pusapskritimių spinduliai bus $R=\frac{b}{2}$ ir $r=\frac{b}{4}$. Vidinio apskritimo spindulį $\varrho$ galima apskaičiuoti iš stačiojo trikampio, atvaizduoto 63 brėžinyje brūkšnelinėmis linijomis. Šio trikampio įžambinė, einanti per apskritimų lietimosi tašką, lygi $\frac{b}{4}+\rho$, vienas statinis lygus $\frac{b}{4}$, o kitas $\frac{b}{2}-\rho$. Pagal Pitagoro teoremą gauname

$$\left(\frac{b}{4}+\rho\right)^2=\left(\frac{b}{4}\right)^2+\left(\frac{b}{2}-\rho\right)^2,$$

arba

$$\frac{b^2}{16}+\frac{b\rho}{2}+\rho^2=\frac{b^2}{16}+\frac{b^2}{4}-b\rho+\rho^2;$$

iš čia

$$\frac{b\rho}{2}=\frac{b^2}{4}-b\rho.$$

Padaliję iš $b$ ir sutraukę panašius narius, gauname

$$\frac{3}{2}\rho=\frac{b}{4};\ \rho=\frac{b}{6}.$$

48 p r a t i m a s. Nubraižykite skriestuvu ir liniuote ornamentą, atvaizduotą 63 brėžinyje.

8. Iš 3 paragrafo sužinojome, kad Pitagoro teorema yra vienas iš pagrindinių, jei ne svarbiausias, plotų teorijos teiginys. Šiame paragrafe ją nagrinėjome kitu aspektu. Paaiškėjo, kad ši teorema yra geometrinių skaičiavimų kertinis akmuo.

Galima laikyti, kad pirmoji krizė matematikos moksle prasidėjo, padarius nuostabų atradimą, kad kai kuriais visiškai paprastais atvejais nebeužtenka pirmykštės skaičiaus sąvokos, apimančios sveikuosius ir trupmeninius skaičius. Gal būt, ne Pitagoras pirmasis įrodė jo vardu pavadintą teoremą, bet Pitagoro ir jo mokyklos nuopelnas yra tai, kad jie pirmieji suvokė šią krizę, o gal ir nurodė kelius jai įveikti.

## § 6. FUNKCINĖS PRIKLAUSOMYBĖS

1. Pitagoro teorema nusako priklausomybę tarp stačiojo trikampio kraštinių: žinodami dvi kraštines, galime rasti trečiąją. Kitaip sakant, kiekviena stačiojo trikampio kraštinė yra kitų dviejų kraštinių f u n k c i j a.

Visų pirma išnagrinėkime vieną paprastą uždavinį, tampriai susijusį su šia funkcija, o tik vėliau — pačią funkciją. Tarkime, kad viena kraštinė yra pastovi — pastovaus ilgio $a$; kita kraštinė kinta — ją laikykime nepriklausomu kintamuoju $x$; trečia kraštinė ieškomoji — ją vadinkime priklausomu kintamuoju $y$.

Dabar atsakykime į šitokius tris klausimus:

1. Kaip kinta įžambinė, kai vienas statinis kinta, o kitas yra pastovus?

2. Kaip kinta statinis, kai įžambinė kinta, o kitas statinis lieka pastovus?

3. Kaip kinta statinis, jeigu kitas statinis kinta, o įžambinė yra pastovi?

2. Pradėsime nuo pirmojo klausimo. Vieną iš statinių, kurį laikome nepriklausomu kintamuoju, pažymėsime raide $x$, įžambinę — raide $y$, o kitą statinį, kuris yra pastovus, pažymėsime raide $a$. Mūsų pavyzdyje šį dydį imsime lygų keturiems kokiems nors ilgio vienetams, sakysime, 4 cm.

Pagal Pitagoro teoremą

$$y^2 = x^2 + a^2;$$

ištraukus šaknį, gauname:

$$y = \sqrt{x^2 + a^2}.$$

Į neigiamą šaknies reikšmę nekreipiame dėmesio, nes atkarpos ilgis negali būti neigiamas.

Dabar, imdami bet kokią $x$ reikšmę, galime apskaičiuoti atitinkamą $y$ reikšmę.

Gausime šitokią lentelę:

$$x = 1, \quad y = \sqrt{17} = 4{,}123;$$

$$x = 2, \quad y = \sqrt{20} = 4{,}472;$$

$$x = 3, \quad y = \sqrt{25} = 5{,}000;$$

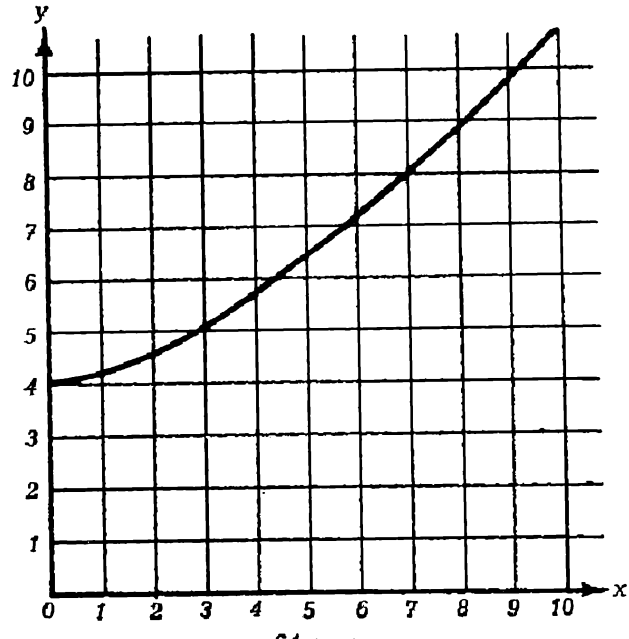
$$x = 4, \quad y = \sqrt{32} = 5{,}657;$$

$$x = 5, \quad y = \sqrt{41} = 6{,}403;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

<Šias kvadratines šaknis galima apskaičiuoti pagal žinomas taisykles, bet paprasčiau jas tiesiog išrašyti iš kokios nors kvadratinių šaknų lentelės.> Čia apsiribojome šaknų reikšmėmis trijų dešimtainių ženklų tikslumu.

Nagrinėdami gautas $y$ reikšmes, jau galime spręsti apie funkcijos kitimo eigą. Ji bus ypač akivaizdi, jeigu funkciją atvaizduosime grafiškai (64 brėž.).



64 pav.

Paimkime gabalėlį milimetrinio popieriaus arba languoto popieriaus lapą iš mokyklinio sąsiuvinio ir nubrėžkime dvi tarpusavyje statmenas tieses — koordinačių ašis. Nuo jų susikirtimo taško — koordinačių pradžios — vienoje ašyje į dešinę, o kitoje — į viršų atidėkime mastelio vienetus, pavyzdžiui, centimetrus. Horizontaliąją tiesę vadinsime $x$ ašimi, o jai statmeną tiesę — $y$ ašimi. Toliau darysime šitaip. Nuo $x$ ašies taško, kuris pažymėtas 1, atidėsime vertikaliai į viršų, t. y. lygiagrečiai $y$ ašiai, atkarpą $y=4{,}123$, atitinkančią reikšmę $x=1$. Taip pat atidėsime ir $y$ reikšmes, atitinkančias kitas $x$ reikšmes. Tokiu būdu gauti taškai akivaizdžiai parodys $y$ priklausomybę nuo $x$. Iš jų išsidėstymo lengva susekti, kaip kinta $y$, pavyzdžiui, pastebime, kad, didėjant $x$, $y$ taip pat didėja, ir kuo toliau, tuo sparčiau.

Šiame pavyzdyje pirmiau apskaičiavome funkciją, o po to nubraižėme jos grafiką, pažymėję taškus, kurie atitinka tik sveikąsias $x$ reikšmes. Be abejo, galima apskaičiuoti $y$ reikšmes, atitinkančias trupmeninius $x$, pavyzdžiui, $x=1{,}1$ arba $x=1{,}2$ ir t. t. Tokių taškų visuma sudarys liniją, kuri atvaizduota 64 brėžinyje.

49 p r a t i m a s. Galima rasti $y$ reikšmes ir iš brėžinio. Kaip paprasčiau tai padaryti? Raskite tokiu būdu $y$ reikšmes, kurios atitinka $x=0{,}5$; 1,5; 2,5 ir t. t.

Kreivė prasideda tašku, kuris atitinka $x=0$ reikšmę. Šiuo atveju nėra jokio stačiojo trikampio ir negalima pagal Pitagoro teoremą apskaičiuoti įžambinės. Šią $x$ reikšmę galima nagrinėti tik kaip ribinį atvejį, kai vienas statinis yra pastovus, lygus 4 vienetams, o kitas mažėja ir įžambinės ilgis vis artėja prie 4. Tad aišku, kodėl grafike, kai $x=0$, atidedame reikšmę $y=4$.

Kreivė, kuri vaizduoja grafiškai funkciją

$$y=\sqrt{x^2+a^2},$$

yra *lygiašonės hiperbolės* dalis.

3. Pereisime prie klausimo, kaip kinta vienas statinis, kai kitas yra pastovus, o įžambinė kinta. Čia nepriklausomas kintamasis yra įžambinė, ją pažymėsime raide $x$, o priklausomą kintamąjį, t. y. kitą statinį — raide $y$. Jeigu pastovaus ilgio statinį pažymėsime raide $a$, tai gausime:

$$x^2=y^2+a^2,$$

arba

$$y=\sqrt{x^2-a^2}$$

(beje, šaknį vėl imame aritmetinę).

Norėdami atvaizduoti šios funkcijos kitimo eigą, vėl sudarysime lentelę. Priešingai nei praeitu atveju, dabar negalime pasirinkti $x$ visiškai laisvai. Pavyzdžiui, pasirinkę $a=4$, kaip praeitame punkte, kai $x=2$, susidurtume su reikšme

$$y=\sqrt{4-16}=\sqrt{-12},$$

t. y. gautume menamą $y$ reikšmę.

Kad pošaknio skaičius būtų teigiamas, turi būti $x>a$; pastebėsime, kad, kai $x=a$, gauname realią $y$ reikšmę $y=\sqrt{0}=0$. Nelygybę $x>a$ lengva paaiškinti geometriškai: juk $x$ — įžambinė, o tokio stačiojo trikampio, kurio įžambinė mažesnė už statinį, negali būti; atvejis, kai įžambinė lygi vienam iš statinių ($x=a$), turi prasmę tiktai kaip riba kitam statiniui sumažėjus iki nulio.

Dabar sudarysime lentelę:

$$x=4,\quad y=\sqrt{0}=0{,}000;$$

$$x=5,\quad y=\sqrt{9}=3{,}000;$$

$$x=6,\quad y=\sqrt{20}=4{,}472;$$

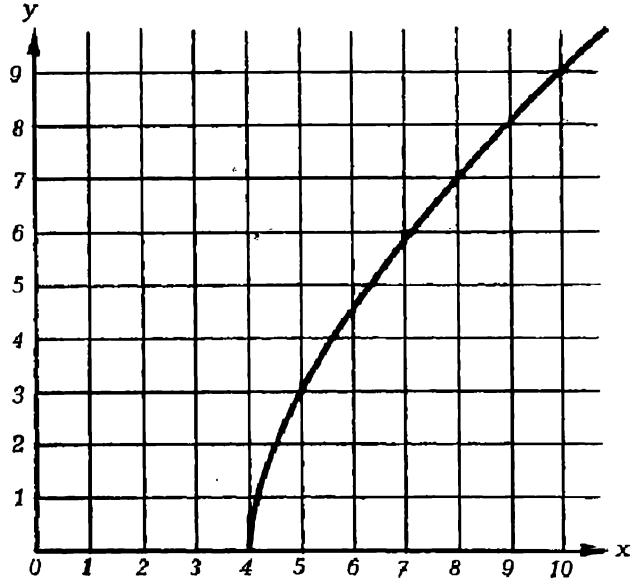
$$x=7,\quad y=\sqrt{33}=5{,}745;$$

$$x=8,\quad y=\sqrt{48}=6{,}928;$$

$$x=9,\quad y=\sqrt{65}=8{,}062;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Jeigu, apskaičiavę tuos dydžius norimu tikslumu ir įterpę tarp sveikųjų $x$ reikšmių trupmenines, atvaizduotume grafiškai, tai gautume kreivę, parodytą 65 brėžinyje.




65 pav.

50 p r a t i m a s. Iš lentelės galite pastebėti, kad, $x$ didėjant, funkcija $y$ didėja vis lėčiau. Pratęskite lentelę iki $x=15$ ir raskite skirtumus tarp kiekvienų dviejų gretimų $y$ reikšmių (atitinkančių sveikuosius $x$). Kokį vaidmenį vaidina tie skirtumai, grafiškai atvaizduojant funkciją?

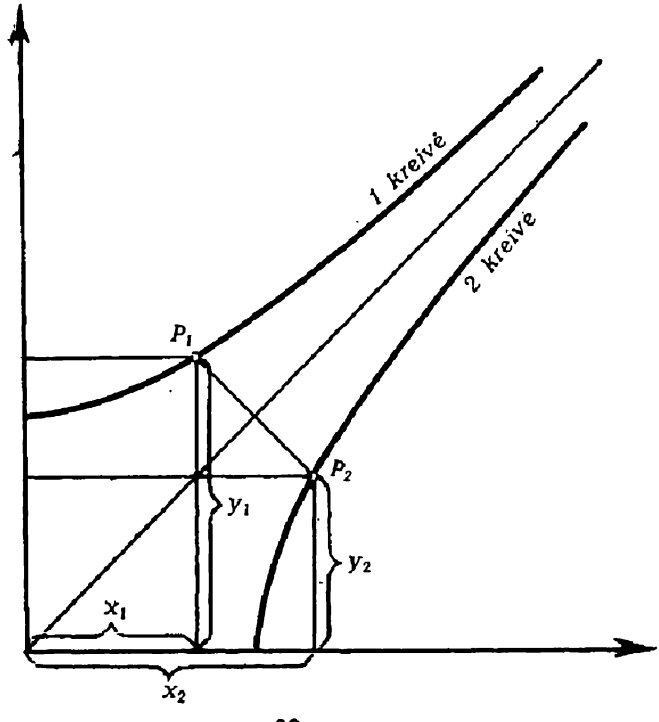
4. Lygindami pastarąjį grafiką su praeito punkto grafiku, galime pastebėti, kad jie kai kuo panašūs. Šiek tiek paanalizuosime tai. Pirmiausia pastebėsime, kad abi nagrinėjamas funkcijas

$$y=\sqrt{x^2+a^2} \text{ ir } y=\sqrt{x^2-a^2}$$

galime gauti vieną iš kitos, vietoj $x$ įrašę $y$ ir vietoj $y$ įrašę $x$. Jeigu taip pakeistume kintamuosius pirmoje išraiškoje, tai gautume

$$x=\sqrt{y^2+a^2};$$

po to, spręsdami šią lygtį $y$ atžvilgiu, gautume antrąją funkciją. Tai savaime aišku, nes pirmuoju atveju įžambinę pažymėjome raide $y$, o statinį — $x$, o antruoju atveju — atvirkščiai. Sakoma, kad viena iš šių funkcijų yra atvirkštinė kitai; pradžioje nagrinėjome įžambinę kaip statinio funkciją, o po to — statinį kaip įžambinės funkciją.




66 pav.

66 brėžinyje nubrėžtos abi (64 ir 65 brėžinių) kreivės. *1* kreivėje (taip žymėsime pirmąją iš minėtųjų kreivių) imsime tašką $P_1$, kuris atitinka tam tikrą $x_1$ reikšmę ir su ja susijusią $y_1$ reikšmę. Iš taško $P_1$ nubrėšime statmenį į kampo, esančio tarp ašių, pusiaukampinę ir jį tiek pat pratęsime; kitaip sakant, rasime tašką, simetrišką taškui $P_1$ šios pusiaukampinės atžvilgiu. Surastasis taškas $P_2$ būtinai priklausys antrajai kreivei. Kodėl?

Iš 66 brėžinio matyti, kad taško $P_2$ koordinatės $y_2$ ir $x_2$ atitinkamai lygios $x_1$ ir $y_1$. Kadangi taškas $P_1$ yra kreivėje *1*, tai

$$y_1 = \sqrt{x_1^2 + a^2};$$

iš čia

$$x_1 = \sqrt{y_1^2 - a^2}.$$

Pastarojoje išraiškoje pakeitę $x_1$ į $y_2$ ir $y_1$ į $x_2$, randame:

$$y_2 = \sqrt{x_2^2 - a^2},$$

taigi taškas $P_2$ yra kreivėje 2. Tašką $P_1$ pasirinkome laisvai, taigi įrodytąją savybę turi visi taškai; vadinasi, *kreivę 2 galime gauti, atvaizdavę kreivę 1, sudarydami simetriją kampo tarp koordinatinių ašių pusiaukampinės atžvilgiu.*

**5.** Beliko trečiasis klausimas. Nepriklausomu kintamuoju $x$ dabar turi būti statinis, priklausomu kintamuoju $y$ — kitas statinis, o įžambinė — pastovi, lygi $c$.

Pagal Pitagoro teoremą

$$x^2 + y^2 = c^2;$$

iš čia

$$y = \sqrt{c^2 - x^2}.$$

Ir šiuo atveju sudarykime lentelę, pasirinkę, pavyzdžiui, $c=5$. Imdami sveikąsias $x$ reikšmes, gausime atitinkamas $y$ reikšmes:

$$x = 0, \quad y = \sqrt{25} = 5{,}000;$$

$$x = 1, \quad y = \sqrt{24} = 4{,}899;$$

$$x = 2, \quad y = \sqrt{21} = 4{,}583;$$

$$x=3, \quad y=\sqrt{16}=4{,}000;$$

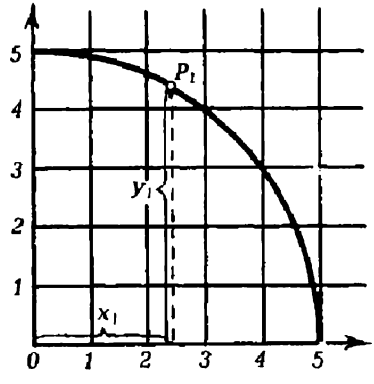
$$x=4, \quad y=\sqrt{9}=3{,}000;$$

$$x=5, \quad y=\sqrt{0}=0{,}000.$$

Didesnių už 5 kintamojo $x$ reikšmių neimame, nes pošaknio skaičių gauname neigiamą.

51 pratimas. Apskaičiuokite funkcijos $y$ reikšmes, kai $x=0{,}1$; 0,2; 0,3, o taip pat kai $x=4{,}9$; 4,8; 4,7, ir raskite gautų reikšmių skirtumus. Paaiškinkite jų prasmę, nubraižę grafiką.

Kaip ir anksčiau, milimetriniame popieriuje pažymėkime taškus, atitinkančius gautas $x$ ir $y$ reikšmes (67 brėž.). Jeigu juos sujungsime sklandžia kreive, tai ji primins ketvirtį apskritimo. Ar tikrai čia apskritimas? Jeigu taip, tai jo spindulys turi būti lygus $c$, t. y. šiuo atveju 5. Nubrėžkime tokį apskritimą. Įsitikinsime, kad jis eina per pažymėtuosius taškus. Tačiau gali būti taip, kad apskritimas ir kreivė sutampa tik šiuose taškuose, o tarp jų kreivė, pavyzdžiui, iškyla bangomis aukštyn arba nusileidžia žemyn. Šį klausimą galima lengvai išspręsti.




67 pav.

Imkime bet kokį apskritimo tašką $P_1$ ir iš jo nubrėžkime statmenį į $x$ ašį. Atkarpą tarp taško $P_1$ ir statmens pagrindo pažymėkime $y_1$, o atkarpą tarp statmens pagrindo ir koordinačių pradžios — $x_1$. Pagal Pitagoro teoremą

$$x_1^2+y_1^2=c^2;$$

iš čia

$$y_1 = \sqrt{c^2 - x_1^2}.$$

Taigi taškas $P_1$ yra kreivėje. Tai, ką įrodėme, yra teisinga bet kuriam apskritimo ketvirtadalio taškui, todėl kreivė ir apskritimas sutampa.

6. Dabar galima iškelti klausimą, kaip stačiojo trikampio vienas elementas išreiškiamas *kitų dviejų* funkcija. Pirmiausia nepriklausomais kintamaisiais imsime statinius ir pažymėsime juos $x$ ir $y$; tuomet įžambinė bus išreiškiama funkcija

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Norėdami tokią dviejų kintamųjų funkciją atvaizduoti grafiškai, jau negalime taikyti ankstesnius atvaizdavimo plokštumoje metodus, nes šios priklausomybės geometrinei išraiškai būtina erdvė.

Įsivaizduokime plokštumą, kurioje nubraižyta koordinačių sistema. Kvadranto, esančio tarp dešinės $x$ pusašės ir viršutinės $y$ pusašės, kiekvieną tašką $P_1$ atitinka konkreti $x$ ir $y$ reikšmių pora $(x_1, y_1)$ ir atvirkščiai. Taško $P_1$ atstumas nuo koordinačių pradžios

$$z_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Tą atstumą atidėkime tiesėje, einančioje per tašką $P_1$ statmenai nagrinėjamai plokštumai; gautą atkarpą pažymėkime $P_1P$. Galime pakelti statmenis iš kiekvieno kvadranto taško ir pažymėti atitinkamus taškus $P$ — atkarpų galus. Visi tie taškai sudarys p a v i r š i ų, kuris ir bus funkcijos $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ geometrinis vaizdas. Koks tai bus paviršius?

Kai norima atvaizduoti kokį nors paviršių, pavyzdžiui, vietovės su kalnais ir slėniais reljefą, dažniausiai naudojamasi „vienodo aukščio kreivių" metodu: nubraižomos kreivės, jungiančios vienodo aukščio taškus (aukštis matuojamas nuo kokio nors pradinio lygio, pavyzdžiui, nuo jūros lygio). Tokios kreivės vadinamos *izohipsėmis*. Topografiniuose žemėlapiuose izohipsės nubraižomos, sujungiant taškus, esančius, pavyzdžiui, 100 m, 105 m ir t. t. aukštyje virš jūros lygio. Kaip atrodo mūsų paviršiaus izohipsės?

Nubrėžkime izohipsę, atitinkančią 10 vienetų aukštį (jį matuojame tais pačiais vienetais, kaip ir $x$ bei $y$). Jos grafiko kol kas nežinome, bet žinome, kad visų taškų koordinatė $z=10$. Tuo būdu, visi jos taškai tenkina lygtį

$$10=\sqrt{x^2+y^2}, \text{ arba } 100=x^2+y^2;$$

iš čia

$$y=\sqrt{100-x^2}.$$

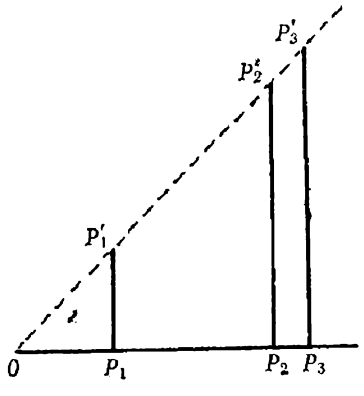
Kaip žinome iš praeito punkto, pagrindinės plokštumos taškai $x$ ir $y$, tenkinantys pastarąją lygtį, yra apskritime, kurio spindulys 10 (tiksliau tariant,— to apskritimo ketvirtadalyje). Jeigu iš apskritimo taškų nubrėžtume statmenas jo plokštumai atkarpas, kurių ilgis 10 vienetų, tai viršutiniai tų atkarpų galai taip pat sudarytų apskritimą. Tai, ką įrodėme vienai izohipsei, bus teisinga ir kitoms: visos jos — apskritimai, arba tiksliau kalbant, apskritimų ketvirtadaliai. Žemiausias nagrinėjamojo paviršiaus taškas sutampa su koordinačių pradžia, nes, kai $x=0$ ir $y=0$, taip pat ir $z=0$. Jeigu pagrindinėje plokštumoje tolsime nuo koordinačių pradžios, tai ir paviršiaus taškų aukštis virš plokštumos didės. Vadinasi, šis paviršius yra kažkokio *kraterio* ketvirtadalis, išpiautas plokštumų $zy$ ir $zx$.

Deja, norint tiksliai įsivaizduoti, koks tai paviršius, turimų žinių dar nepakanka. Kyla klausimas, koks šio kraterio *nuolydis*, be to, ar jis kinta, ar lieka pastovus? O jeigu nuolydžio kampas pastovus, tai kokio jis dydžio?

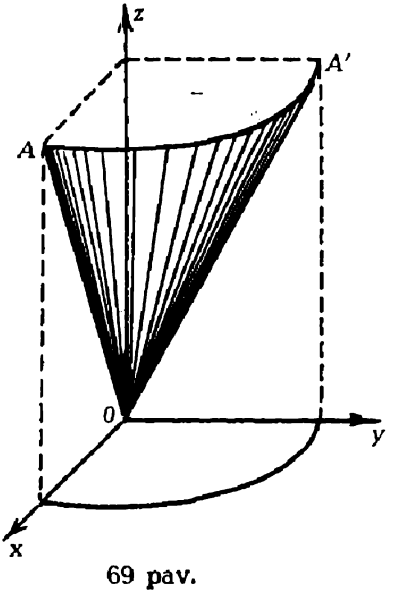
Per pagrindinės plokštumos tašką $O=(0,0)$ nubrėžkime spindulį ir pažymėkime jame keletą taškų $P_1$, $P_2$, $P_3$, ... Iš tų taškų pakelsime statmenis pagrindinei plokštumai iki susikirtimo su nagrinėjamu paviršiumi taškuose $P_1'$, $P_2'$, $P_3'$, ... Be to, nubraižykime per spindulį plokštumą, statmeną pagrindinei plokštumai, — joje ir bus statmenys $P_1P_1'$, $P_2P_2'$, $P_3P_3'$, ... Iš pastarosios plokštumos susikirtimo su kraterio paviršiumi linijos $OP_1'P_2'P_3'$ (68 brėž.) jau galime spręsti apie kraterio nuolydį. Ta linija rodo, kad polinkio kampas yra pastovus ir lygus 45°, nes trikampiai $OP_1P_1'$, $OP_2P_2'$, ... yra statūs ir lygiašoniai. Tai, kas teisinga vienam spinduliui, einančiam per tašką $O$, bus teisinga ir visiems kitiems pagrindinės

plokštumos spinduliams, einantiems per tą tašką. Taigi ieškomasis paviršius kiekviename taške yra vienodai pasviręs 45° kampu.

Koks gi tas paviršius? Mes gerai jį pažįstame! Tai — įprastinio kūgio šoninio paviršiaus ketvirtadalis. Jo ašis yra $z$ ašis; o viršūne jis remiasi į pagrindinę plokštumą koordinačių pradžioje; pusė viršūnės kampo lygi 45°. Galime įsivaizduoti, kad jis gaunamas, sukant kampo $xOz$ pusiaukampinę apie $z$ ašį (69 brėž.).




68 pav.




69 pav.

**7.** Panašiai galime rasti statinio $z$, kaip įžambinės $x$ ir statinio $y$ funkcijos, išraišką:

$$z = \sqrt{x^2 - y^2}.$$

Dabar reikia rasti paviršių, kuriuo atvaizduojama geometriškai ši funkcija. Visų pirma, ieškomasis paviršius turi šią savybę: kai $x = y$, t. y. visuose kampo tarp koordinatinių ašių pusiaukampinės taškuose $z$ lygu nuliui. Vadinasi, toji pusiaukampinė yra ieškomojo paviršiaus ir pagrindinės plokštumos susikirtimo linija. Virš pusės kvadranto, esančios tarp pusiaukampinės ir $y$ ašies, paviršiaus taškų visai nėra, nes visiems tos srities taškams $y > x$, todėl pošaknio reikšmė neigiama.

Smulkiau to paviršiaus nenagrinėsime, tiktai pasakysime, kokios jis formos, ir paliksime patiems skaityto-

jams tai įrodyti. Ieškomasis paviršius yra ketvirtadalis šoninio paviršiaus kūgio, kurio pusė viršūnės kampo lygi 45° (kaip ir praeitame punkte), o ašis yra $x$ ašis. Paprasčiausiai galime įsivaizduoti, kad tas paviršius gaunamas, sukant kampo tarp $x$ ir $y$ ašių pusiaukampinę apie $x$ ašį.

52 pratimas. Išnagrinėkite pastarojo paviršiaus izohipses. Kokie aukščiai $z$ atitinka $x$ ašies taškus? Išnagrinėkite $z$ reikšmes, atitinkančias kokią nors tiesę, statmeną $x$ ašiai. Kokiu būdu galima įrodyti, kad pusė kūgio viršūnės kampo yra 45°?

Jeigu $x$ pažymėtume statinį, o ne įžambinę, gi $y$ — įžambinę, o ne statinį, tai gautume tokį pat kūginį paviršių, kaip ką tik išnagrinėtasis, tačiau šiuo atveju pusiaukampinę reikėtų sukti apie $y$ ašį.

53 pratimas. Į kintamųjų $x$ ir $y$ sukeitimą erdvėje galime žiūrėti kaip į simetriją tam tikros plokštumos atžvilgiu. Kokia tai plokštuma?

8. Skaitytojas, susipažinęs ne tik su apskritimu, hiperbolėmis ir kūgiu, bet ir su kitomis kreivėmis bei paviršiais, gali pastebėti tokį dėstymo trūkumą: nagrinėjome ne visą kreivę ar paviršių, o tik jų dalį.

Iki šiol atkarpos ilgį laikėme teigiamu dydžiu, todėl $x$, $y$ ir $z$ reikšmės galėjo būti tik teigiamos. Jeigu lygybes, išplaukiančias iš Pitagoro teoremos, laikytume tiesiog skaičių (o ne ilgių) tarpusavio priklausomybėmis, tai, pavyzdžiui, lygybėje

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

su kuria susidūrėme 6 punkte, visi trys kintamieji galėtų būti ir neigiami, nes jų kvadratai vis tiek būtų teigiami; todėl, ženklo galime neapriboti. Imdami ir neigiamas kintamųjų reikšmes, apskaičiavę naujų taškų koordinates ir jas atvaizdavę grafike, kreives papildytume iki pilnų apskritimų ir hiperbolių, o dalį kūginio paviršiaus — iki viso kūgio.

54 pratimas. Papildykite kreivių dalis, išnagrinėtas 2, 3 ir 5 punktuose iki pilnų kreivių (tam reikia imti ne tik teigiamas $x$ ir $y$ reikšmes, bet ir neigiamas); atlikite atitinkamus apskaičiavimus ir nubraižykite grafikus.

55 pratimas. Kaip atrodytų visas paviršius, kurį nubraižytume analogiškai 6 punkte išnagrinėtajam paviršiui, imdami tiek teigiamas, tiek ir neigiamas $x$ ir $y$ reikšmes?

Susumuodami šio paragrafo rezultatus, galime pasakyti štai ką: visais išnagrinėtais atvejais Pitagoro lygybės, kaip dviejų kintamųjų funkcijos geometrinis vaizdas yra apskritas statusis kūgis, kurio viršūnės kampas (didžiausias kampas tarp dviejų bet kurių sudaromųjų) — statusis. Jeigu vieną iš dydžių nagrinėtume kaip kito funkciją, trečiąjį laikydami pastoviu, tai gautume „kūgio piūvį", pavyzdžiui, to kūgio izohipsę, esančią plokštumoje, kurios atstumas nuo koordinačių plokštumos lygus duotai konstantai. Gautieji piūviai gali būti apskritimai arba lygiašonės hiperbolės.

## § 7. PITAGORO SKAIČIAI*

1. Trys *sveikieji teigiami* skaičiai $x$, $y$ ir $z$, kurie tenkina „Pitagoro lygtį"

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

vadinami Pitagoro skaičiais. Su paprasčiausiu Pitagoro skaičių pavyzdžiu mes jau susipažinome: kalbėjome apie trikampį, kurio kraštinės lygios 3, 4 ir 5. Iš tikrųjų,

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Kyla klausimas, ar yra ir daugiau Pitagoro skaičių trejetų, o jeigu yra, tai kokie tie skaičiai?

Savaime aišku, jeigu skaičiai 3, 4 ir 5 — Pitagoro skaičiai, tai tą patį galima pasakyti apie skaičius $2 \cdot 3$, $2 \cdot 4$, $2 \cdot 5$, be to, apie skaičius $3 \cdot 3$, $3 \cdot 4$, $3 \cdot 5$ ir t.t. Apskritai jeigu $a$, $b$, $c$ — Pitagoro skaičių trejetas, o $m$ — bet koks sveikasis teigiamas skaičius, tai $ma$, $mb$, $mc$ taip pat yra Pitagoro skaičių trejetas. Iš tikrųjų, jeigu

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

tai ir

$$m^2(a^2 + b^2) = m^2c^2,$$

arba

$$(ma)^2 + (mb)^2 = (mc)^2.$$

---

* Žr. taip pat knygą В. Серпинский, Пифагоровы треугольники, М., 1959, kuri plačiai papildo šį paragrafą.

Kaip matome, jeigu Pitagoro skaičių trejeto kiekvieną skaičių padaugintume iš vieno ir to paties sveikojo teigiamo skaičiaus, tai gautume tiek Pitagoro skaičių trejetų, kiek kartų daugintume. Visi tie trejetai sudaromi iš vieno trejeto, kurio skaičiai neturi bendro daliklio. Tokį trejetą vadinsime p a g r i n d i n i u, o visus kitus — i š v e s t i n i a i s. Pavyzdžiui, skaičiai 3, 4, 5 yra pagrindinis Pitagoro skaičių trejetas, o skaičiai 6, 8, 10 — jau išvestinis trejetas.

Kaip minėjome, *trys* pagrindinio trejeto skaičiai neturi bendro daliklio; tačiau pakanka žinoti, kad bet kurie *du* iš tų trijų skaičių neturi bendro daliklio. Iš tiesų, jeigu tartume, kad du skaičiai $a$ ir $b$ iš kurio nors Pitagoro skaičių trejeto turi bendrą daliklį $f$, tai juos galėtume užrašyti šitaip:

$$a = fa_1, \quad b = fb_1 .$$

Tuomet iš lygybės

$$a^2 + b^2 = c^2$$

išplauktų, kad

$$f^2(a_1^2 + b_1^2) = c^2,$$

t. y. skaičius $c$ turėtų tą patį daliklį $f$.

**2.** Parašykime sveikųjų skaičių kvadratų seką ir raskime gretimų kvadratų skirtumus; gausime nelyginių skaičių seką:

0 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19.

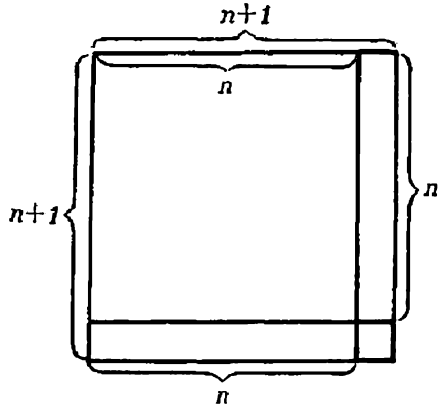
Bendru pavidalu galima užrašyti šitaip:

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1,$$

t. y. $(n + 1)$-jo ir $n$-jo kvadratų skirtumas yra lygus nelyginiam skaičiui $2n + 1$. Geometriškai tai paaiškinama 70 brėžinyje: jeigu kvadrato kraštinę, lygią $n$ ilgio vienetų, pailgintume dar vienu vienetu ir ant pailgintos kraštinės nubraižytume kitą kvadratą, tai pastarojo plotas, lygus $(n+1)^2$ kv. vienetų, būtų $2n+1$ kv. vienetais didesnis, už pradinio kvadrato plotą $n^2$.

Tarp nelyginių skaičių, kuriuos užrašėme, suradę iš eilės einančių kvadratų skirtumus, yra ir visi nelyginiai kvadratai, t. y. skaičiai

9, 25, 49, 81, 121 ir t. t.




70 pav.

Nelyginį kvadratą pažymėję $2n + 1$, gauname šias $n$ reikšmes, atitinkančias užrašytųjų seką:

4, 12, 24, 40, 60, ...

Visais šiais atvejais skaičiai $n$ ir $n + 1$, taip pat skaičius, kurio kvadratas lygus $2n + 1$, sudaro Pitagoro skaičių trejetą, nes iš aukščiau parašytos tapatybės išplaukia, kad

$$(n + 1)^2 = n^2 + (2n + 1).$$

Iš pirmųjų nelyginių kvadratų pavyzdžių gauname šitokius trejetus:

$$5^2 = 4^2 + 3^2,$$

$$13^2 = 12^2 + 5^2,$$

$$25^2 = 24^2 + 7^2,$$

$$41^2 = 40^2 + 9^2,$$

$$61^2 = 60^2 + 11^2.$$

Pirmasis trejetas žinomas visiems. Antrasis, o tiksliau — iš jo išvestinis trejetas

$$39^2 = 36^2 + 15^2,$$

aprašomas jau IV—V a. iki m.e. viename indusų veikale; ten yra ir trečiasis trejetas. Visi tokiu būdu gauti Pitagoro skaičių trejetai būtinai turi būti pagrindiniai, nes gretimi sveikieji teigiami skaičiai $n$ ir $n + 1$ negali turėti kito bendro daliklio, išskyrus vienetą.

Kadangi nelyginių kvadratų eilę galime kiek norime pratęsti, tai pagrindinių Pitagoro skaičių trejetų gauname **be galo daug**.

3. Kyla klausimas, ar šiuo metodu gauname visus pagrindinius Pitagoro skaičių trejetus? Visi mūsų rastieji pagrindiniai trejetai turėjo tą ypatybę, kad juose buvo po du iš eilės einančius skaičius, nes nelyginį kvadratą $2n + 1$ visada gaudavome kaip dviejų gretimų skaičių kvadratų skirtumą.

Dabar surašykime skirtumus ne gretimų sveikųjų skaičių kvadratų, o po vieną kvadratą praleisdami. Papildę pradinę kvadratų seką skaičiumi $0^2 = 0$, gausime šitokią skirtumų seką:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 & 100 \\ & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & / & \\ & 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 & 36 & \end{array}$$

Visi pastarosios sekos nariai dalūs iš 4. O jeigu šis dalus iš keturių narys savo ruožtu yra kurio nors skaičiaus kvadratas, tai tas skaičius įeina į Pitagoro trejetą. Pavyzdžiui, skirtumą 16 atitinka Pitagoro trejetas 3, 4, 5, o skirtumą 36 — trejetas 6, 8, 10, kuris yra išvestinis iš to paties pagrindinio trejeto. Matome, kad, šiuo būdu sudarant skirtumus, gaunami ne tik pagrindiniai trejetai. Artimiausią pagrindinį trejetą

15, 8, 17

atitinka skirtumas 64. Tai — visiškai naujas pagrindinis Pitagoro skaičių trejetas (tarp kitko, indusai jį žinojo). Tokiu keliu galima gauti vis naujus ir naujus pagrindinius trejetus, bet ne tai yra mūsų tikslas. Mes tenorėjome nustatyti, kad praeitame punkte nurodytu metodu negalima gauti **visų** pagrindinių Pitagoro trejetų, t. y. kad uždavinio rasti visus Pitagoro skaičius pilnutinai dar neišsprendėme. O tai mes nustatėme!

56 pratimas. Pratęskite skirtumų seką. Raskite bendro pavidalo priklausomybę tarp kvadrato $n^2$, $(n+2)^2$ ir tarp jų skirtumo.

57 pratimas. Remdamiesi bendra taisykle, raskite (žr. 56 pratimą) artimiausią pagrindinį trejetą, einantį po 15, 8, 17.

4. Dabar pamėginkime rasti visus Pitagoro lygties sprendinius. Jau išnagrinėtuoju metodu, netgi išplėstiniu, visų sprendinių nerasime, nes, sudarydami skirtumus, praleisdami du, tris ir t. t. kvadratus, gausime vis naujus ir naujus Pitagoro skaičių trejetus.

Prieš ieškodami bendro lygties

$$x^2 + y^2 = z^2$$

sprendinio, išsiaiškinkime, kurie trejeto skaičiai gali būti lyginiai ir kurie — nelyginiai. Kadangi mus domina tik pagrindiniai trejetai, tai kiekvieno trejeto skaičiai yra tarpusavyje (reliatyviai) pirminiai; vadinasi, trejete $x$, $y$ ir $z$ negali būti dviejų lyginių skaičių. Antra vertus, nustatyta, kad abu skaičiai $x$ ir $y$ negali būti nelyginiai. Iš tikrųjų, jeigu taip būtų, tai $z$ būtų lyginis skaičius, pavyzdžiui,

$$z = 2z_1 .$$

Iš čia išplauktų, kad

$$z^2 = 4z_1^2,$$

t. y. kad $z^2$ būtų dalus iš 4 be liekanos. Kadangi $x^2+y^2 = 4z_1^2$, tai suma $x^2+y^2$ taip pat turėtų būti dali iš 4. Dabar tarkime, kad

$$x = 2p + 1,\ y = 2q + 1;$$

tuomet

$$x^2 + y^2 = 4p^2 + 4p + 1 + 4q^2 + 4q + 1.$$

Iš čia matome, kad, sumą $x^2+y^2$ dalydami iš 4, gauname liekaną 2. Taigi įrodėme, kad abu skaičiai $x$ ir $y$ negali būti nelyginiai.

Vadinasi, visuomet galima tarti, kad $x$ — nelyginis, $y$ — lyginis, o $z$ — vėl nelyginis.

58 pratimas. Ar negali būti atvirkščiai: $x$ — lyginis, o $y$ — nelyginis? Kaip reikia suprasti padarytą prielaidą?

5. Nagrinėjamąją lygtį galime užrašyti šitaip:

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)\ (z - y).$$

Pažymėkime $z+y$ raide $m$, o $z-y$ — raide $n$; tuomet

$$z=\frac{m+n}{2},\ y=\frac{m-n}{2},$$

ir

$$x^2 = mn.$$

Visų pirma, pastebėsime, kad abudu skaičiai $m$ ir $n$ yra nelyginiai; iš tikrųjų, jeigu nors vieną iš jų laikytume lyginiu, tai $x^2$, o tuo pačiu ir $x$, taip pat būtų lyginis, o tai prieštarautų ankstesnei prielaidai.

Skaičiai $m$ ir $n$ turi būti tarpusavyje pirminiai. Iš tiesų, jeigu jie turėtų bendrą daliklį $t$ (skaičius $t$ nelygus 2), tai galėtume užrašyti, kad

$$m = tm_1,\ n = tn_1;$$

tuomet būtų

$$z=\frac{m+n}{2}=t\,\frac{m_1+n_1}{2},\ y=\frac{m-n}{2}=t\,\frac{m_1-n_1}{2}$$

— skaičiai $z$ ir $y$ taip pat turėtų bendrą daliklį $t$. Bet tai neįmanoma, nes skaičiai $y$ ir $z$, kaip jau žinome, yra tarpusavyje pirminiai.

**6.** Įrodysime tokią taisyklę: *jeigu dviejų tarpusavyje pirminių skaičių sandauga yra sveikojo skaičiaus kvadratas, tai ir kiekvienas iš tų skaičių yra sveikojo skaičiaus kvadratas.* Pavyzdžiui, jeigu skaičių 36 išskaidysime į tarpusavyje pirminius dauginamuosius, tai kiekvienas iš jų turės būti sveikojo skaičiaus kvadratas. Iš tikrųjų, išskaidę jį į dauginamuosius $4\cdot 9$, matome, kad taisyklė pasitvirtina (beje, tai ir yra vienintelis išskaidymo būdas, neskaitant trivialaus skaidinio $1\cdot 36$). Šią taisyklę lengva įrodyti bendru pavidalu. Iš tikrųjų, į sveikojo skaičiaus kvadratą kiekvienas pirminis daugiklis įeina lyginį skaičių kartų; pavyzdžiui,

$$30^2 = 900 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5.$$

Jeigu į vieną iš dauginamųjų, į kuriuos skaidome duotąjį kvadratą, koks nors pirminis daugiklis įeina nelyginį skaičių kartų (pavyzdžiui, $18 = 2\cdot 3\cdot 3$), tai tas pats pirminis daugiklis būtinai turi įeiti ir į kitą dauginamąjį

(50 = 2·5·5). Vadinasi, abu skaičiai (šiuo atveju 50 ir 18) turi bendrą daliklį. Ir atvirkščiai: du dauginamieji, į kuriuos išskaidomas sveikojo skaičiaus kvadratas, galės būti tarpusavyje pirminiai tik tuo atveju, kai pirminiai daugikliai kiekviename iš jų pasikartos lyginį skaičių kartų, t. y. kai tiedu dauginamieji patys bus sveikųjų skaičių kvadratai.

Grįšime prie mūsų lygties paskutinės formos $x^2 = mn$. Kadangi skaičiai $m$ ir $n$ tarpusavyje pirminiai ir jų sandauga yra kvadratas, tai tie skaičiai taip pat turi būti kvadratai; todėl galima užrašyti:

$$m = u^2,\ n = v^2;$$

čia skaičiai $u$ ir $v$ — nelyginiai ir tarpusavyje pirminiai. Pastarąją lygybę dabar užrašysime šitaip:

$$x^2 = u^2 \cdot v^2;$$

iš jos išplaukia, kad

$$x = u \cdot v. \qquad \text{(I)}$$

Dabar galime užrašyti $y$ ir $z$ išraiškas, aukščiau gautose formulėse vietoj skaičių $m$ ir $n$ įrašydami $u^2$ ir $v^2$. Gausime:

$$y = \frac{u^2 - v^2}{2}, \qquad \text{(II)}$$

$$z = \frac{u^2 + v^2}{2}. \qquad \text{(III)}$$

**7.** Lygybės (I), (II) ir (III) sudaro nagrinėjamosios lygties *bendrąjį sprendinį*; tai — *būtinos* sąlygos, kad būtų tenkinama lygtis

$$x^2 + y^2 = z^2. \qquad \text{(A)}$$

Galima tvirtinti ir atvirkščiai: jeigu $u$ ir $v$ — bet kokie nelyginiai tarpusavyje pirminiai skaičiai, be to, $u > v$, tai skaičių $x$, $y$ ir $z$ reikšmės, apskaičiuotos pagal (I), (II) ir (III) formules, tenkins lygtį (A). Iš tikrųjų,

$$(u \cdot v)^2 + \left(\frac{u^2 - v^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right)^2. \qquad \text{(B)}$$

Tuo galima įsitikinti apskaičiavus.

Pabandykime šiuo būdu paieškoti palyginti didelių Pitagoro skaičių trejetų. Sakykime, $u = 11$, $v = 9$; tada

$$x = 99, \quad y = 20, \quad z = 101.$$

Kaip matyti iš lygties (B), ją gali tenkinti ir ne tarpusavyje pirminiai skaičiai $u$ ir $v$; tačiau iš jų visuomet gauname tik išvestinius Pitagoro trejetus.

59 pratimas. Sudarykite Pitagoro skaičių sąrašą, imdami visas galimas $u$ ir $v$ reikšmes nuo 1 iki 10.

60 pratimas. Paaiškinkite keliais pavyzdžiais šio punkto gale parašytą teiginį apie išvestinius trejetus.

<Pitagoro skaičių teorijoje (I), (II) ir (III) formulės yra pagrindinės. Kadangi Pitagoro trejetų yra be galo daug (taip pat ir pagrindinių), tai galime rasti Pitagoro skaičius, tenkinančius vienokias ar kitokias papildomas sąlygas. Šitaip, pavyzdžiui, jau pastebėjome, kad yra be galo daug tokių Pitagoro skaičių trejetų, kuriuose *du skaičiai iš trijų yra gretimi natūriniai skaičiai.* Taip pat galima įrodyti, kad yra be galo daug ir tokių Pitagoro skaičių trejetų, kuriuose *vienas iš skaičių yra sveikojo skaičiaus kvadratas* (pavyzdžiui, trejetai 3, 4, 5; 7, 24, 25; 9, 40, 41; ...); tačiau tokių Pitagoro skaičių trejetų, kuriuose būtų iš karto po du kvadratus, visai nėra (įrodymą žr. § 8, 5—8 punktuose). Žymiausias tokio tipo uždavinys (labai sunkus!) yra Ferma uždavinys: *reikia rasti tokius Pitagoro skaičių trejetus* $x$, $y$, $z$ (čia $x^2 + y^2 = z^2$), kad $x + y$ ir $z$ būtų sveikųjų skaičių kvadratai. Pasirodo, yra be galo daug šitokių Pitagoro trejetų, bet visi jie sudaryti iš labai didelių skaičių; mažiausias toks trejetas yra*:

$$x = 4\ 565\ 486\ 027\ 761,$$

$$y = 1\ 061\ 652\ 293\ 520,$$

$$z = 4\ 687\ 298\ 610\ 289;$$

šiuo atveju $x + y = (2\ 372\ 159)^2$, o $z = (2\ 165\ 017)^2$.

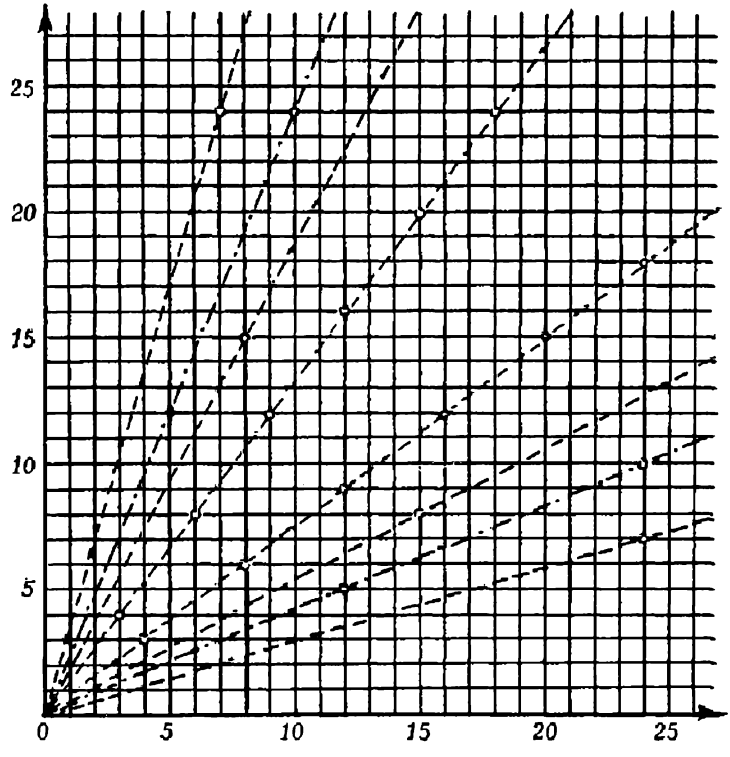
61 pratimas. Įrodykite šitokį teiginį: jeigu visų stačiojo trikampio kraštinių ilgiai yra sveikieji skaičiai, tai jo plotas dalus iš 6, o visų kraštinių ilgių sandauga dali iš 60.>

---

* Žr., pavyzdžiui, V. Serpinskio knygą, nurodytą 76 puslapyje.

8. Kai kurie skaitytojai, gal būt, susimąstė, kaip būtų galima vaizdžiai parodyti visą Pitagoro skaičių aibę.

Tam tiktų lentelė, kurią sudarėme, atlikdami 59 pratimą. Taip pat galime sudaryti šių skaičių išsidėstymo geometrinę schemą. Nubraižykime plokštumoje koordinačių sistemą (71 brėž.) ir koordinačių ašims lygiagre-




71 pav.

čias tieses, atitinkančias sveikąsias $x$ ir $y$ reikšmes. Gautajame tinklelyje pažymėkime mažais skrituliukais jau žinomus lygties

$$x^2 + y^2 = z^2$$

sprendinius. Taip atvaizdavus, bet kuris pagrindinis Pitagoro skaičių trejetas ir visi iš jo išvestiniai trejetai sudarys tam tikrą skaičių spindulį, savitą kiekvienam pagrindiniam trejetui. Žymėdami tuo pačiu metodu vis didesnių skaičių trejetus (71 brėžinyje priėjome iki $x = 25$, $y = 25$), gausime vis naujus spindulius.

62 pratimas. Įrodykite, kad visi išvestiniai trejetai yra tame pačiame spindulyje, kaip ir pagrindinis trejetas, iš kurio jie gauti.

63 pratimas. Įrodykite, kad brėžinys, vaizduojantis Pitagoro skaičius (71 brėž.), yra simetriškas koordinačių sistemos kampo pusiaukampinės atžvilgiu.

**9.** Klausimą apie Pitagoro skaičius galime nagrinėti ir kitu būdu. Pradinės lygties

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

abi puses padalykime iš $z^2$; tuomet gausime:

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1. \tag{2}$$

Naudodamiesi pastarąja lygybe, tą patį uždavinį suformuluosime štai kaip: reikia rasti visus tokius lygties

$$x_1^2 + y_1^2 = 1 \tag{3}$$

sprendinius $x_1$, $y_1$, kuriuos galima užrašyti paprastosiomis trupmenomis, t. y. kuriuos sudaro racionalieji skaičiai. Jeigu, pavyzdžiui, trupmenos

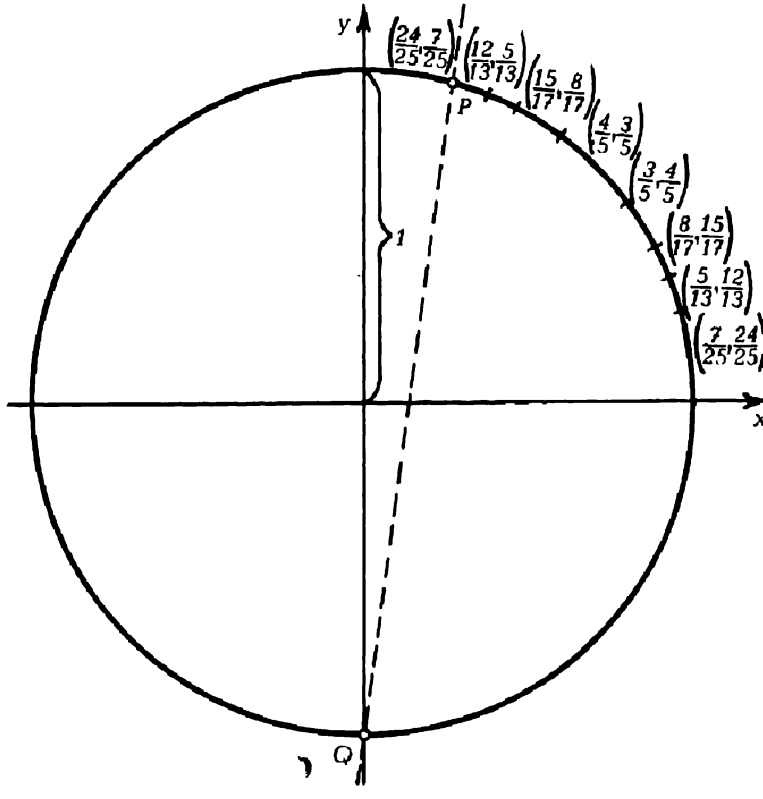
$$x_1 = \frac{x}{z},\ y_1 = \frac{y}{z}$$

(jas, be abejo, galime subendravardiklinti) yra (3) lygties sprendiniai, tai jie tuo pačiu yra ir (2) bei (1) lygčių sprendiniai. (3) lygtį galima labai paprastai paaiškinti geometriškai: ji yra ne kas kita, kaip apskritimo, kurio spindulys lygus vienetui, lygtis (plg. § 6, p. 5). Tuo būdu, norėdami rasti (1) lygties racionaliuosius sprendinius geometriškai, turėsime rasti apkritimo taškus, kurių koordinatės yra racionalūs skaičiai. 72 brėžinyje pažymėta visa eilė tokių taškų; vienas iš jų — taškas $P$, kurio koordinatės $\left(\frac{24}{25}, \frac{7}{25}\right)$. Kad tai yra vienetinio apskritimo taškas, įtikina tapatybė

$$\left(\frac{24}{25}\right)^2 + \left(\frac{7}{25}\right)^2 = 1.$$

64 pratimas. 72 brėžinyje taškus pažymėjome, naudodamiesi 71 brėžiniu. Kaipgi tai padarėme?

65 pratimas. Parodykite, kad, kokį mažą beimtume apskritimo lanką, jame bus taškų su racionaliomis koordinatėmis.




72 pav.

<Naujai suformulavus uždavinį apie Pitagoro skaičius, galima labai paprastai išvesti 6 punkte minimas pagrindines formules (I)—(III). Reikia sugalvoti, kokiu metodu galėsime rasti visus apskritimo $x^2 + y^2 = 1$ racionaliuosius taškus, t. y. tuos taškus, kurių koordinatės — racionalieji skaičiai. Sakykime, $P$ — vienas toks taškas; sujunkime jį su tašku $Q$ (0,-1), kuriame apskritimas susikerta su $y$ ašimi (72 brėž.).

Kiekvienos tiesės, einančios per koordinačių pradžią O (išskyrus $y$ ašį), lygtį galima užrašyti šitaip:

$$y = kx;$$

čia $k$ — bet koks skaičius (tiesės krypties koeficientas); tiesės, einančios per tašką $Q$, lygtis:

$$y + 1 = kx; \qquad (*)$$

skaičius $k$ taip pat vadinamas krypties koeficientu. Dabar pastebėsime štai ką: jeigu tiesė kerta apskritimą racionaliame taške $P(x, y)$, tai jos krypties koeficientas $k$ yra r a c i o n a l u s (nes šiuo atveju $k=\frac{y+1}{x}$; $x$ ir $y$ — taško $P$ racionalios koordinatės). Atvirkščiai, jeigu $k$ — racionalusis skaičius, tai tiesė kerta apskritimą racionaliame taške $P$; tai lengva įrodyti tiesiog patikrinant. Iš tikrųjų, norint surasti tiesės ir apskritimo susikirtimo tašką, reikia išspręsti šitokią lygčių sistemą:

$$x^2 + y^2 = 1;\ y + 1 = kx,$$

kurią galime pakeisti viena lygtimi:

$$\left(\frac{y+1}{k}\right)^2 + y^2 = 1,$$

arba

$$(1 + k^2)\, y^2 + 2y + 1 - k^2 = 0.$$

Iš čia turime

$$y_1 = \frac{k^2-1}{k^2+1},\ y_2 = -1$$

ir atitinkamai

$$x_1 = \frac{y_1+1}{k} = \frac{2k}{k^2+1},\ x_2 = \frac{y_2+1}{k} = 0.$$

Taigi, norint surasti visus racionaliuosius apskritimo taškus, galima rasti taškus, kuriuose apskritimas susikerta su tokiomis tiesėmis (*), kurių krypties koeficientas $k$ — racionalusis skaičius: $k=\frac{u}{v}$ (čia $u$ ir $v$ — sveikieji skaičiai). Tų taškų koordinatės randamos iš formulių

$$x_1 = \frac{2k}{k^2+1} = \frac{2uv}{u^2+v^2},\ y_1 = \frac{k^2-1}{k^2+1} = \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}. \qquad (**)$$

Matome, kad (**) formulės — tai tos pačios (I)—(III) formulės, tik truputį kitaip užrašytos!>

**10.** Jeigu du stačiuosius trikampius, kurių kraštinių ilgiai yra sveikieji skaičiai ir kurie turi po lygų statinį, suglaustume tais statiniais, tai gautume trikampį, kurio visų kraštinių ilgiai ir plotas būtų taip pat sveikieji skai-

čiai. Pavyzdžiui, pridėję vieną prie kito Pitagoro trikampius, kurių kraštinių ilgiai yra 9, 12, 15 ir 5, 12, 13, kad sutaptų lygūs statiniai, gausime trikampį, kurio kraštinių ilgiai bus 13, 14, 15. Kraštinei 14 statmena aukštinė 12, todėl trikampio plotas lygus $\frac{12 \cdot 14}{2} = 84$. Tokie trikampiai vadinami Herono trikampiais.

66 pratimas. Iš žinomų Pitagoro trikampių sudarykite dar keletą Herono trikampių. Tinkamiems skaičiams rasti pasinaudokite 71 brėžiniu.

Lengva rasti bendrą taisyklę, pagal kurią galime sudaryti kiek norime Herono trikampių. Sakykime,

$$a_1,\ b_1,\ c_1 \text{ ir } a_2,\ b_2,\ c_2$$

yra dviejų Pitagoro trikampių kraštinių ilgiai (paskutinieji iš trijų skaičių visuomet reikš įžambinės ilgį). Tuomet

$$a_1b_2,\ b_1b_2,\ c_1b_2 \text{ ir } a_2b_1,\ b_2b_1,\ c_2b_1$$

arba

$$a_1a_2,\ b_1a_2,\ c_1a_2 \text{ ir } a_2a_1,\ b_2a_1,\ c_2a_1$$

taip pat gali būti Pitagoro trikampių kraštinės; iš tikrųjų tai — išvestiniai trejetai, gauti, visas ankstesniųjų trikampių kraštines padauginus iš $b_2$ ir $b_1$ arba atitinkamai iš $a_2$ ir $a_1$. Naujieji trikampiai turi lygius statinius $b_1b_2$, arba $a_1a_2$. Jeigu dabar juos suglausime lygiais statiniais (bendrasis statinis bus sudvejinto trikampio aukštinė), tai, pavyzdžiui, pirmuoju atveju gausime Herono trikampį, kurio kraštinių ilgiai $(a_1b_2 + a_2b_1)$, $c_1b_2$, $c_2b_1$. To trikampio aukštinė bus lygi $b_1b_2$, vadinasi, jo plotas

$$\frac{1}{2}\, b_1 b_2 (a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Analogiškai galime pasielgti su antrąja trikampių pora.

11. Toliau svarstydami, kaip galime rasti kitus Herono trikampius, remsimės bendru Pitagoro lygties sprendiniu, kurį jau žinome. Išsiaiškinkime visų pirma štai ką. Turėdami bet kokį Herono trikampį, galime gauti kiek norime naujų — tereikia skaičius, kurie rodo jo kraštinių ilgius, padauginti iš vieno ir to paties skaičiaus, pa-

našiai kaip kad darėme su Pitagoro trikampiais. Vadinasi, galime nereikalauti, kad kraštinių ilgiai būtų *sveikieji* skaičiai; pakanka, kad jie būtų *racionalieji* (užbaigti šį samprotavimą paliksime skaitytojui). Tą patį galime pasakyti apie trikampių plotus arba aukštines.

67 p r a t i m a s: Herono trikampio kraštinių ilgiai ir plotas yra racionalieji skaičiai. Kodėl turi būti racionalūs ir visų trijų jo aukštinių ilgiai?

Taigi toliau galime nagrinėti tik trikampio kraštinių santykį $a : b : c$. Sakykime, duoti du statieji trikampiai, kurių kraštinės išreiškiamos Pitagoro skaičiais, be to, pirmojo trikampio kraštinės

$$a_1 = u_1 v_1, \quad b_1 = \frac{u_1^2 - v_1^2}{2}, \quad c_1 = \frac{u_1^2 + v_1^2}{2},$$

o antrojo

$$a_2 = u_2 v_2, \quad b_2 = \frac{u_2^2 - v_2^2}{2}, \quad c_2 = \frac{u_2^2 + v_2^2}{2}$$

($u_1$, $u_2$, $v_1$, $v_2$ tenkina dar papildomas sąlygas, panašias į tas, su kuriomis susidūrėme ankstesniuose samprotavimuose). Ką tik aprašytuoju būdu iš dviejų duotų trikampių sudarykime du naujus Pitagoro trikampius, kurie turi po lygų statinį, būtent:

$$a_3 = u_1 v_1 \; \frac{u_2^2 - v_2^2}{2}, \quad b_3 = \frac{(u_1^2 - v_1^2)(u_2^2 - v_2^2)}{4},$$

$$c_3 = \frac{(u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 - v_2^2)}{4},$$

$$a_4 = u_2 v_2 \; \frac{u_1^2 - v_1^2}{2}, \quad b_4 = \frac{(u_1^2 - v_1^2)(u_2^2 - v_2^2)}{4},$$

$$c_4 = \frac{(u_2^2 + v_2^2)(u_1^2 - v_1^2)}{4}.$$

Dabar gautuosius trikampius suglaudę lygiais statiniais $b_3 = b_4 = h$, gausime Herono trikampį, kurio kraštinės $a = c_3$, $b = c_4$, $c = a_3 + a_4$ ir aukštinė $h$.

$c$ išraišką galėsime truputį pakeisti, pastebėję, kad

$$u_1 v_1 (u_2^2 - v_2^2) + u_2 v_2 (u_1^2 - v_1^2) = (u_1 v_2 + v_1 u_2) \cdot (u_1 u_2 - v_1 v_2)$$

(tuo galima įsitikinti patikrinus). Dabar, padauginę $a(=c_3)$, $b(=c_4)$ ir $c(=a_3+a_4)$ išraiškas iš 4, gausime:

$$a:b:c=[(u_1^2+v_1^2)\ (u_2^2-v_2^2)]:[(u_2^2+v_2^2)\ (u_1^2-v_1^2)]:$$

$$:[2(u_1v_2+v_1v_2)\ (u_1u_2-v_1v_2)].$$

Nereikia, aišku, tikėtis, kad dešinėje esantieji trys skaičiai būtų tarpusavyje pirminiai, net jeigu $u_1$ ir $v_1$, taip pat $u_2$ ir $v_2$ tarpusavyje pirminiai.

Išnagrinėkime vieną paprastą pavyzdį. Sakykime,

$$u_1=3,\quad v_1=1,\quad u_2=5,\quad v_2=1.$$

Tuomet

$$a:b:c=240:208:224,$$

arba

$$a:b:c=15:13:14.$$

Šis Herono trikampis gerai žinomas*.

68 pratimas. Raskite keletą kitų Herono trikampių.

Oileris (1707—1783) nurodė kitą formulių sistemą, kuri gaunama, trikampių $a_1a_2$, $b_1a_2$, $c_1a_2$ ir $a_2a_1$, $b_2a_1$, $c_2a_1$ bendruoju statiniu imant $a_1a_2$.

69 pratimas. Įrodykite, kad tuo atveju gausime šitokias formules:

$$a=u_1v_2\,\frac{u_1^2+v_1^2}{2},\quad b=u_1v_1\frac{u_2^2+v_2^2}{2},$$

$$c=\frac{(u_1v_2+v_1u_2)(u_1u_2-v_1v_2)}{2}.$$

Padaliję tas išraiškas iš $u_1v_1u_2v_2$ ir padauginę iš 2, gausime:

$$a:b:c=\frac{u_1^2+v_1^2}{u_1v_1}:\frac{u_2^2+v_2^2}{u_2v_2}:\frac{(u_1v_2+v_1u_2)(u_1u_2-v_1v_2)}{u_1u_2v_1v_2}.$$

70 pratimas. Naudodamiesi ankstesnėmis formulėmis, apskaičiuokite Herono trikampį, imdami

$$u_1=3,\ v_1=1,\ u_2=5,\ v_2=1!$$

71 pratimas. Raskite abiem atvejais bendrą išraišką aukštinės, gautos, sutapdinus lygius statinius, o taip pat ploto išraišką.

* Nuostabių skaičių mėgėjams nurodysime dar keletą Herono trikampių, kurių kraštinės išreiškiamos gretimais sveikaisiais skaičiais: 51, 52, 53; 193, 194, 195; 723, 724, 725; 2701, 2702, 2703.

72 pratimas. Bramagubta (gim. maždaug 600 m.) gavo šitokias formules:

$$p=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+b\right),\ q=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c}+c\right),\ r=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-b\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c}-c\right).$$

Paaiškinkite jų kilmę.

**12.** Toliau tiriant Herono trikampius, buvo keliami nauji reikalavimai, pavyzdžiui, kad pusiaukraštinių arba pusiaukampinių ilgiai taip pat būtų racionalieji skaičiai.

<Pavyzdžiui, Oileris nurodė, kad trikampio, kurio kraštinių ilgiai 136, 170, 174, plotas ir visos pusiaukraštinės yra sveikieji skaičiai; įrodyta, kad šis trikampis — mažiausias iš visų Herono trikampių, kurių pusiaukraštinių ilgiai yra sveikieji skaičiai. Buvo nagrinėjamas ir toks uždavinys: rasti visus Herono trikampius, kurių perimetras lygus plotui (paprasčiausias toks trikampis — statusis trikampis, kurio kraštinės lygios 6, 8 ir 10)*.

Į uždavinius apie Pitagoro skaičius panašūs tokie uždaviniai: rasti visus trikampius, kurių kraštinių ilgiai — sveikieji skaičiai ir dviejų kampų skirtumas lygus 90° (stačiuosiuose trikampiuose dviejų smailiųjų kampų suma lygi 90°!); arba tokius trikampius, kurių kraštinių ilgiai — sveikieji skaičiai, o vienas iš kampų lygus 60 arba 120° (dar sudėtingiau: kraštinių ilgiai yra sveikieji skaičiai, o vienas kampas lygus racionaliam laipsnių skaičiui — nesvarbu kokiam!); arba, pagaliau, rasti trikampius, kurių kraštinės — sveikieji skaičiai, o vienas kampas sveiką skaičių kartų didesnis už kitą (pavyzdžiui, 2 kartus, 7 kartus ir pan.). Išsprendus tuos uždavinius, randamos formulės, panašios į 6 punkto (I)—(III) formules, tiktai sudėtingesnės**.>

Toliau nagrinėdami tokio tipo uždavinius, pereiname prie kitų plokščių figūrų, kurių kraštinės išreiškiamos racionaliausiais skaičiais: visų pirma, prie lygiagretainių, kurių kraštinių ir įstrižainių ilgiai yra racionalieji skaičiai, po to — prie bet kokių ir specialių keturkampių (pavyzdžiui, įbrėžtų į apskritimą) su racionaliomis kraštinėmis ir t. t.

---

* Žr. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. I, М., 1959, 127 uždavinys.

** Ten pat, 128—129 uždaviniai.

Pagaliau prabėgomis palieskime briaunainius, kurių kraštinių ilgiai irgi racionalieji skaičiai. Paprasčiausias briaunainis, kuriam šis klausimas nėra trivialus, būtų tetraedras. Jeigu reikalaujama, kad racionaliaisiais skaičiais būtų išreiškiamos ne tik tetraedro briaunos, bet ir jo tūris, tai taisyklingieji tetraedrai, aišku, neatitiks šių sąlygų. Iš karto neaišku, ar apskritai gali būti tokių tetraedrų. Šią problemą nagrinėjo Sveringas. Štai dailiausias sprendinys: tetraedro, kurio briaunos lygios 6, 7, 8, 9, 10 ir 11, tūris lygus 48. <Kitas įdomus pavyzdys — tetraedras, kurio briaunos 896, 990, 1073, 1073, 1073 ir 1073 (896 ir 990 yra priešingųjų briaunų ilgiai). Pastarojo tetraedro ne tik tūris yra sveikasis skaičius 62 092 800, bet ir visų sienų plotai — sveikieji skaičiai 436 800, 436 800, 471 240 ir 471 240.>

## § 8. FERMA TEOREMA*

1. Ankstesniame paragrafe susipažinome su lygties

$$x^2 + y^2 = z^2$$

sprendiniais, kurie yra sveikieji teigiami skaičiai. Jų radome be galo daug.

Natūraliai kyla klausimas, kaip sprendžiamos analogiškos lygtys

$$x^3 + y^3 = z^3,$$

$$x^4 + y^4 = z^4,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ir apskritai lygtis

$$x^n + y^n = z^n.$$

Jeigu pamėgintume laimę ieškoti kurios nors iš tų lygčių sprendinį, tai tektų nusivilti. Iki šiol nežinomas nė vienas sveikųjų teigiamų skaičių trejetas, kuris tenkintų kurią nors iš tų lygčių (su kiek norima dideliu laipsnio rodikliu). Todėl galima suformuluoti šitokį teiginį:

* Apie ją taip pat galite pasiskaityti knygelėje А. Я. Хинчин, Великая теорема Ферма, М.—А., 1932.

*Lygtis* $x^n + y^n = z^n$, *kur* $n$ — *sveikasis skaičius, didesnis kaip 2, neturi sveikųjų sprendinių.*

Šis teiginys pavadintas *„didžiąja Ferma teorema"*. Pjeras Ferma (1608—1665) — juristas iš Tulūzos (Prancūzijoje) ir, be abejo, vienas žymiausių visų laikų matematikų. Garsųjį teiginį jis užrašė tarp daugelio kitų pastabų nuosavos graikų matematiko Diofanto (maždaug 300 m.) knygos paraštėse. Be to, Ferma pastebėjo, kad jis žino iš tiesų nuostabų to teiginio įrodymą, tiktai dėl vietos stokos negali jo išdėstyti.

Iki šiol dar niekam nepavyko pilnutinai įrodyti tos teoremos, todėl būtų teisingiau kalbėti apie Ferma problemą.

2. Oileris įrodė teoremą, kai laipsnio rodiklis $n$ yra lygus 3 ir 4, o Giotingeno matematikas Dirichlė (1805—1859) — kai $n = 5$, ir tiktai Kumeris (1810—1893) pasiekė žymesnių laimėjimų, įrodinėdamas bendrą teoremą paties sukurtais algebrinės skaičių teorijos metodais. Nesunku pastebėti, kad pakanka įrodyti Ferma teoremą, tiktai kai laipsnio rodiklis lygus 4 ir nelyginiams pirminiams skaičiams 3, 5, 7, 11, ... Iš tikrųjų, jeigu, pavyzdžiui, lygties

$$x^6 + y^6 = z^6$$

sprendinys būtų sveikieji skaičiai $a$, $b$ ir $c$, tai ir lygties

$$x^3 + y^3 = z^3$$

sprendinys taip pat būtų sveikieji skaičiai, būtent, $x = a^2$, $y = b^2$ ir $z = c^2$. Kumeris įrodė, kad lygtis neturi sprendinio tuo atveju, kai laipsnio rodiklis yra vadinamasis „taisyklingas" pirminis skaičius. Prie tokių skaičių (deja, tiksliai ir paprastai juos apibrėžti būtų sunku) priklauso, pavyzdžiui, visi pirminiai skaičiai, ne didesni kaip 100, išskyrus tris skaičius: 37, 59 ir 67. Tarp kitko, iki šiol nežinoma, ar egzistuoja kiek norint dideli taisyklingi pirminiai skaičiai.

Kumeris įrodė, kad neįmanoma gauti sveikųjų lygties sprendinių ir tuo atveju, kai laipsnio rodiklis priklauso žinomai „netaisyklingų" pirminių skaičių grupei, į kurią įeina ir trys minėtieji skaičiai. Vadinasi, jau Kumerio laikais teorema buvo įrodyta jo sukurtais metodais, esant bet kokiam rodikliui, ne didesniam kaip 100.

Šioje nedidelėje knygelėje neįmanoma pateikti netgi bendriausių žinių apie algebrinės skaičių teorijos metodus. Tą teoriją išvystė Kumeris, o vėliau Hilbertas, Furtvengleris ir visa grupė dvidešimtojo amžiaus matematikų. Tačiau keletą žodžių verta tarti: Ferma problemos sprendimas perkeltas į platesnę skaičių sritį; jeigu bus įrodyta, kad lygtis neturi sveikojo sprendinio, kai laipsnio rodiklis yra tos platesnės srities „sveikasis skaičius", tai tuo pačiu teorema bus įrodyta ir kai jis priklauso daug siauresnei mus dominančiai racionaliųjų skaičių sričiai.

3. Ferma teorema nebūtų susilaukusi tokio visuotinio dėmesio, jeigu ne Darmštadte miręs matematikos daktaras P. Volfskelis, kuris užrašė (galime pastebėti — be reikalo) Giotingeno mokslų draugijai 100 000 markių kapitalą su sąlyga, kad ta suma būtų išmokėta kaip premija mokslininkui, išsprendusiam Ferma problemą. Giotingeno mokslų draugija nustatė, kad sprendimą galima nagrinėti tik tada, kai jis paskelbtas laikraštyje arba knygoje — tikrinti rankraščius buvo atsisakyta; premiją galima išmokėti ne anksčiau kaip po dvejų metų, pateikus darbą. Premija gali būti paskirta iki 2007 m. Kapitalo procentai turėjo būti skiriami matematikos mokslų vystymui paskatinti. Infliacija, kilusi po pirmojo pasaulinio karo, nuvertino tą premiją; didelę dalį procentų panaudojo pati Giotingeno draugija.

<Pavyzdžiui, už tuos pinigus, ne kartą buvo kviesti į Giotingeną skaityti paskaitas įžymūs vokiečių ir užsienio matematikai bei fizikai. Pasakojama, kad komisijos premijai už Ferma uždavinio išsprendimą skirti pirmininkas, įžymus vokiečių matematikas, Giotingeno universiteto profesorius D. Hilbertas kartą po eilinio gautų sprendimų svarstymo pasakė: „Kokia laimė, kad, be manęs, regis, nėra matematiko, kuris įstengtų susidoroti su šiuo uždaviniu; o aš pats niekuomet nesiryšiu papiauti vištos, kuri mums deda auksinius kiaušinius".> Kartą nemaža suma buvo įteikta Viferichui, kurio paskelbtas darbas reiškė esminį laimėjimą, sprendžiant garsųjį uždavinį.

Kol kas kalbėjome apie pačią premiją. Tačiau kokios baisios buvo jos paskelbimo pasekmės! Anksčiau kiekvienas bent kiek žymesnis matematikas, o ypač matematinio žurnalo redaktorius, laikas nuo laiko gaudavo už-

davinių apie skritulio kvadratūrą arba kampo trisekciją „sprendimų", nors jau seniai griežtai įrodyta, kad tų uždavinių negalima išspręsti skriestuvu ir liniuote. Dabar šiuos uždavinius pakeitė Ferma teorema; tarp kitko, ją spręsti viliojo ne tik šlovė, bet ir stambus pinigas. Ir įdomiausia — nors atidesnio stebėtojo tai nenustebins,— kad daugiausia sprendimo bandymų buvo gauta ne iš matematikų, o iš inžinierių, dvasininkų, mokytojų, gimnazistų, studentų, asmenų be konkrečios profesijos ir t. t., ir ne tik iš Vokietijos, bet ir iš daugelio kitų šalių. Kaip rašė vienas Giotingeno mokslų draugijos narys, visa toji pretendentų armija tiek teturėjo bendro, kad „jie visiškai neįsivaizdavo uždavinio matematinės svarbos". <Žinomas pasakojimas apie Matematikos instituto gautą telegramą: „įrodžiau Ferma teoremą iks entasis plius ygrek entasis lygu zet entasis pagrindinė idėja perkeliame narį ygrek entasis į dešinę pusę smulkmenos laišku"; aišku, laiškas su smulkmenomis rašomas iki šiol. Retai tokiuose „įrodymuose" buvo gilesnių idėjų, negu šovusi į galvą telegramos autoriui!>

Dar iki paskelbiant Giotingeno draugijai premijos skyrimo sąlygas, tiktai į vieną laikraščio skelbimą buvo atsiliepta šimtais „įrodymų", o greitai jų skaičius prašoko tūkstantį. Kiek sugaišta laiko ir įdėta beprasmiško darbo! Galima beveik be menkiausios abejonės tvirtinti, kad visi tie įrodymai nepagrįsti, nors daugelio jų autoriai grasino skundais už jiems priklausančių 100 000 markių neišmokėjimą. Vienas matematinis žurnalas „Archiv der Mathematik und Physik" įsteigė pastovų skyrių, kuriame sąžiningiausiai buvo demaskuojami Ferma teoremos „įrodymai"; iki 1911 metų pradžios buvo išnagrinėta 111 įrodymų, ir visi jie buvo pripažinti nepagrįstais. Ilgainiui žurnalas nutraukė šį bereikalingą darbą, bet įrodymų srautas nenutrūko.

Būta, be abejo, ir kuriozų. Štai, viename iš atsiųstų įrodymų du faktai buvo neįrodyti, o tik paaiškinti pavyzdžiais. Vieną iš tų trūkumų buvo lengva papildyti, bet antrajame kaip tik ir glūdėjo dalyko esmė. Apie tai pranešiau savo korespondentui. Atsakymą gavau sekančiu paštu: man buvo pažadėta 10% premijos, jeigu įrodysiu tą antrąjį faktą. Ir aš, perpratęs smulkmeną (tarp kitko, lygiareikšmę Ferma teoremos įrodymui!), galėjau tapti 10 000 markių savininku, bet...

Viename dienraštyje, paskelbusiame apie premiją, buvo išspausdinta ne

$$x^n + y^n = z^n \ (n>2), \tag{1}$$

o

$$x^n + y^n = z^n (n+2). \tag{2}$$

Kažkas bematant įrodė, kad tariamoji „Ferma teorema" (2) visiškai neteisinga; jau kai $n=1$, gauname daug sveikųjų lygties $x+y=3z$ sprendinių. Ir šį teoremą sugriaunantį įrodymą jis pasiuntė Giotingeno mokslų draugijai anksčiau, negu laikraštis suspėjo pranešti apie klaidą. Kokios gi nuomonės buvo tas žmogus apie matematikus, kurie siūlė 100 000 markių premiją už tokį niekniekį?

Kitas pretendentas rašo trumpai ir aiškiai: kaip yra žinoma, $a^2+b^2=c^2$; jeigu būtų $a^n+b^n=c^n$, tai turėtume $n=2$, o tai prieštarauja sąlygai. Tuo negalimumas įrodytas!

Paaiškinimus, kad atsiųstas įrodymas neteisingas, jų siuntėjai kartais sutinka su ironiška šypsena, o kartais — didžiai nusivylę, žiūrint, kokio jie būdo. Tarkime, nevykėlį matematiką pasisekė įtikinti, kad jo įrodymas klaidingas; netrukus jis atsiunčia antrą įrodymą arba papildomai prie pirmojo įrodymo atsiunčia pirmą paaiškinimą, antrą, trečią „Įrodinėjimo" hidra neužmušta! Ir labai, labai retai keitimasis laiškais pasibaigia taip, kaip išreikšta šiame kažkieno atsiųstame eilėraštyje:

Aš, regis, ne „ožių" genties,
Ir ne visai žioplys, išties.
Problemą sprendžiau.— Nepavyko!
Tiek to, yra kitų dalykų.
O kad perniek trukdžiau aš Jus,
Tai būkit... kvailiui atlaidus.

Ne, tas, kuris šitiek suvokė, jau nėra kvailys!

Pasirodžius pirmajam šios mažos knygelės leidimui, nežiūrint visų perspėjimų, taip pat užplūdo srautas laiškų su Ferma teoremos įrodymais. Tur būt, vienintelė nauda, kurią turėjome iš infliacijos Vokietijoje, buvo tai, kad tas srautas išseko. Kas sprendė šį uždavinį dėl pinigų, jau seniai metė šį užsiėmimą, o tiems, kas linkę imtis šios problemos iš meilės matematikai, siūlome nu-

kreipti savo sugebėjimus kitu keliu, kuriuo eidami, galėsite pajusti pasitenkinimą, o, gal būt, ir tikėtis savitų rezultatų. Galima nurodyti visą eilę sričių (pavyzdžiui, taikomosios matematikos), kuriose netgi nespecialistas ras pakankamai temų savarankiškam darbui ir pajus kūrybos džiaugsmą.

**4.** Šioje mažoje knygelėje, nutoldami nuo Pitagoro teoremos ir Pitagoro skaičių prie Ferma teoremos, turėjome ypatingą tikslą. Dažnai kalbama, esą matematika — tai visiškai užbaigtas, sustingęs mokslas. Ką tik įsitikinome, kad ji anaiptol ne tokia. Be tiesų, žmonijai žinomų jau du tūkstančiai ir daugiau metų, sužinojome apie tampriai su jomis susijusią neišspręstą problemą, ir dargi tokią, kurios turinį galima paaiškinti kiekvienam — net ir tam, kas neturi specialių matematinių žinių.

Jau minėjome, kad Ferma teorema, kai laipsnio rodiklis lygus 3, 4, 5, buvo įrodyta dar iki Kumerio. Pateiksime įrodymą vienu iš tų atvejų — būtent, nagrinėsime lygtį

$$x^4+y^4=z^4.$$

Labai paprastą Ferma teoremos įrodymą šiam atvejui surado Oileris. Tarp kitko, įrodę, kad (a) lygties sprendinys $x$, $y$, $z$ negali būti sudarytas iš sveikųjų skaičių, tuo pačiu atsakome ir į klausimą apie lygties

$$x^{4n}+y^{4n}=z^{4n} \qquad \text{(b)}$$

sprendinius ($n$ — bet kuris teigiamas sveikasis skaičius, didesnis už vienetą).

**5.** Prieš pradėdami nagrinėti lygtį $x^4+y^4=z^4$, įrodykime, kad negalima išspręsti (sveikaisiais teigiamais skaičiais) lygties

$$(x^2)^2+(y^2)^2=z^2.$$

Pastarąją lygtį užrašėme šitaip todėl, kad būtų iš karto matyti jos ryšys su Pitagoro lygtimi. Turime atsakyti į klausimą, ar galima rasti bent vieną tokį Pitagoro skaičių trejetą, kurio du mažesnieji skaičiai būtų sveikųjų skaičių kvadratai? Iki šiol tokių trejetų nesutikome; bet tai, žinoma, dar nereiškia, kad jų iš viso nėra. Skaičiai,

sudarantys tokius trejetus, gali būti labai dideli. Žinoma, iš karto sutarsime, kad ieškome pagrindinio trejeto, o išvestiniai mūsų nedomina, todėl skaičius $x$, $y$ ir $z$ galima laikyti tarpusavyje pirminiais. Parodysime, kad lygtis (c) neturi sveikųjų sprendinių. Tai gana subtilus įrodymas, todėl pirmiausia jį paaiškinsime vienu pavyzdžiu. Negalima nurodyti mažiausios teigiamos trupmenos. Kodėl? Jeigu būtų galima nurodyti tokią trupmeną $\frac{1}{n}$ $\left(\text{sakykime, } \frac{1}{100}\right)$, tai visuomet būtų galima nurodyti ir dar mažesnę trupmeną $\frac{1}{n+1}$ $\left(\text{šiuo atveju } \frac{1}{101}\right)$.

Pasinaudosime ta idėja įrodymui. Tarkime, kad vienas iš lygties sprendinių yra mažiausias, o po to parodykime, kaip iš jo galima gauti dar mažesnį,— tuo pačiu įrodysime, kad negali būti mažiausio sprendinio. Betgi mes nagrinėjame tik tokius sprendinius, kurie yra sveikieji skaičiai, todėl vienas iš jų turi būti mažiausias (jeigu tik apskritai tie sprendiniai egzistuoja!). Vienintelė išeitis iš šio prieštaravimo: tenka pripažinti, jog tokių sprendinių visai nėra.

Patikslinkime, kaip suprantame mažiausią sprendinį arba mažiausią teigiamą sveikąjį sprendinį. Tai — toks sprendinys $x_1$, $y_1$, $z_1$, kuriame $z_1$ reikšmė yra mažiausia galima. Jeigu tokių trejetų su mažiausiu $z_1$ turėtume keletą, tai pasirinktume tą, kuriame $x_1$ būtų mažiausias ir būtent tą trejetą laikytume mažiausiu. Apie tokį mažiausią trejetą ir bus kalbama tolesniuose samprotavimuose; aišku, tai bus pagrindinis trejetas.

6. Jeigu teisinga lygybė

$$(x_1^2)^2 + (y_1^2)^2 = z_1^2,$$

tai, remiantis ankstesniojo paragrafo 6 punkto (I)—(III) formulėmis, skaičius $x_1^2$, $y_1^2$ ir $z_1$ galima šitaip išreikšti nelyginiais tarpusavyje pirminiais skaičiais $u$ ir $v$ $(u>v)$:

$$x_1^2 = uv, \tag{Ia}$$

$$y_1^2 = \frac{u^2 - v^2}{2}, \tag{IIa}$$

$$z_1 = \frac{u^2 + v^2}{2}. \tag{IIIa}$$

Iš (Ia) lygybės, kaip ir iš § 7, 6 punkto, darome išvadą, kad tarpusavyje pirminiai skaičiai $u$ ir $v$ turi būti sveikųjų skaičių kvadratai. Pavyzdžiui,

$$u=u_1^2,\ v=v_1^2;$$

čia $u_1$ ir $v_1$ vėl turi būti nelyginiai tarpusavyje pirminiai skaičiai ir $u_1>v_1$. Įrašykime naujuosius skaičius (IIa) lygybėje ((IIIa) lygybės kol kas nenaudosime). Gausime:

$$y_1^2=\frac{u_1^4-v_1^4}{2}=\frac{(u_1^2+v_1^2)(u_1^2-v_1^2)}{2}.$$

Skaičius $u_1$ ir $v_1$ vėl pakeiskime naujais skaičiais. Sakykime,

$$u_1+v_1=2u_2,\quad u_1-v_1=2v_2;$$

tuomet

$$u_1=u_2+v_2;\ v_1=u_2-v_2.$$

Pastebėsime, kad dviejų pirmųjų lygybių dešinėse pusėse parašėme daugiklį 2; taip daryti turėjome teisę, nes dviejų nelyginių skaičių suma ir skirtumas visuomet yra lyginiai skaičiai.

Naujieji skaičiai $u_2$ ir $v_2$ — vėl tarpusavyje pirminiai. Iš tikrųjų, jeigu jie turėtų bendrą daliklį $t$, tai ir $u_1$, ir $v_1$ būtų dalūs iš $t$; bet to negali būti, nes $u_1$ ir $v_1$ pagal sąlygą tarpusavyje pirminiai.

Pridursime, kad reiškinys $u_2^2+v_2^2$ negali turėti bendro daliklio su $u_2$ arba $v_2$, nes $u_2$ ir $v_2$ — tarpusavyje pirminiai skaičiai.

73 pratimas. Įrodykite tai!

Dabar $y_1^2$ išreikšime naujais skaičiais $u_2$ ir $v_2$:

$$u_1^2-v_1^2=4u_2v_2,$$

$$u_1^2+v_1^2=2(u_2^2+v_2^2),$$

vadinasi,

$$y_1^2=4u_2v_2(u_2^2+v_2^2).$$

7. Pastarajai lygybei pritaikysime jau ne kartą naudotą teoremą: jeigu tarpusavyje pirminių skaičių sandauga yra kvadratas, tai tie skaičiai taip pat yra pilni kvadratai. Kadangi nežinome, ar skaičiai $u_2$ ir $v_2$ tarpu-

savyje pirminiai su skaičiumi 4, tai atsargumo sumetimais perkelsime daugiklį į kairiąją pusę ir tuo pačiu jo išvengsime. Lygties

$$\frac{y_1^2}{4} = u_2 v_2 (u_2^2 + v_2^2)$$

kairėje pusėje yra sveikasis skaičius, nes $y_1^2$ pagal bendrą sąlygą (plg. § 7, p. 4) turi būti lyginis, o kiekvienas lyginis skaičius, kuris yra pilnas kvadratas, būtinai dalosi iš 4. Bet tuomet $u_2$, $v_2$ ir $u_2^2 + v_2^2$, kaip teigia teorema, turi būti kvadratai, pavyzdžiui:

$$u_2 = x_2^2,\ v_2 = y_2^2;\ u_2^2 + v_2^2 = z_2^2.$$

Iš tų trijų lygybių išplaukia:

$$x_2^4 + y_2^4 = z_2^4.$$

Vadinasi, remdamiesi trejetu $x_1$, $y_1$, $z_1$, kuris yra duotosios lygties sprendinys, gavome, nors ir ne visai paprastai, kitą tokį trejetą $x_2$, $y_2$, $z_2$ — tarp kitko, taip pat pagrindinį.

74 pratimas. Šio punkto pradžioje panaudojome teoremą, kuri buvo įrodyta § 7, p. 6 tiktai esant dviem dauginamiesiems; įrodykite analogišką teoremą, kai dauginamųjų yra trys.

8. Liko įrodyti, kad skaičius $z_2$ mažesnis už $z_1$. Prisiminę ankstesnius žymėjimus, turėsime:

$$z_2^2 = u_2^2 + v_2^2 = \frac{u_1^2 + v_1^2}{2} = \frac{u+v}{2},$$

o

$$z_1 = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

(žr. III a). Kadangi dviejų sveikųjų teigiamų skaičių, iš kurių bent vienas didesnis už 1, suma visada mažesnė už tų skaičių kvadratų sumą, tai

$$z_2^2 < z_1,$$

vadinasi,

$$z_2 < z_1.$$

Pasiekėme norimą tikslą; tarę, kad $z_1$ — mažiausias galimas skaičius, įrodėme, kad yra dar mažesnis skai-

čius $z_2$; tuo būdu, gavome prieštaravimą, kurį įmanoma paaiškinti tik pripažinus, kad mažiausio skaičiaus $z$ negali būti. Betgi tai reiškia, kad lygtis

$$x^4+y^4=z^2$$

neturi sveikųjų sprendinių.

75 pratimas. Egzistuoja minėtos lygties „sprendinys" $x=1$, $y=0$, $z=1$. Kodėl tokio „sprendinio" egzistavimas neturi įtakos mūsų samprotavimams?

9. Netrukus baigsime įrodyti Ferma teoremą, kai laipsnio rodiklis lygus 4. Jeigu lygtis

$$x^4+y^4=z^4$$

turėtų sveikąjį sprendinį $x_1$, $y_1$, $z_1$ tai skaičių trejetas $x_1$, $y_1$, $z_1$ būtų lygties

$$x^4+y^4=z^2$$

sveikasis sprendinys, o tokio sprendinio iš viso negali būti. Todėl pirmoji lygtis taip pat negali turėti sprendinio, sudaryto iš sveikųjų skaičių.

10. Kai lygčių laipsnių rodikliai — pirminiai skaičiai, suprantama, nebegalima taikyti to paties metodo, kaip imant $n=4$. Jau tuo atveju, kai $n=3$, būtinos kitos priemonės, o jas išdėstyti šioje knygelėje neįmanoma*. Tačiau pasistengsime nors trumpai supažindinti skaitytoją su kai kuriais šios problemos tyrimais.

Visus galimus atvejus suskirstysime į dvi klases.

Pirmajai klasei priskirsime visus tuos atvejus, kai nė vienas iš trijų skaičių $x$, $y$ ir $z$ nedalus iš nelyginio pirminio skaičiaus $p$, kuris yra lygties laipsnio rodiklis.

Antrajai klasei priskirsime visus likusius atvejus, t. y. tokius, kai bent vienas iš trijų skaičių $x$, $y$ ir $z$ dalus iš $p$. Galime sakyti: tik vienas, nes jeigu būtų dalūs iš $p$ du iš tų skaičių, tai būtų dalus ir trečiasis, vadinasi, galėtume visus tris skaičius suprastinti iš bendro daliklio.

* Ferma teoremos įrodymas, kai $n=3$, išdėstytas 99 puslapyje nurodytoje A. Chinčino knygelėje, o taip pat knygelėje Л. Г. Шнирельман, Простые числа, М.—Л., 1940.

**11.** Šiek tiek smulkiau išnagrinėsime I klasės atvejus. A. Viferichas, kurio vardą jau minėjome, įrodė štai ką: jeigu tuo atveju, kai rodiklis $p$ yra pirminis skaičius, lygtis turėtų sprendinį, tai reiškinys

$$P(2)=\frac{2^p-2}{p}$$

būtų dalus iš $p$.

<Lengva įrodyti, kad skaičius $2^p-2$ dalus iš $p$, koks bebūtų $p$ (žr. žemiau p. **12**). Tačiau rasti tokius skaičius $p$, kad $2^p-2$ būtų dalus iš $p^2$ (ir atitinkamai $P(2)$ dalus iš $p$), labai sunku. Žymus tarybinis matematikas D. Gravė netgi spėjo, kad tokių skaičių iš viso nesą ir, tuo remdamasis, tvirtino savo skaičių teorijos kurse, kad Ferma uždavinys negali turėti I tipo sprendinių; tą prielaidą pagrindė Gravės mokiniai, patikrinę, kad išraiška $P(2)$ nesidalo iš $p$, imant visus pirminius skaičius, mažesnius kaip 1000. Vėliau pasisekė įrodyti, kad> mažiausias pirminis skaičius $p$, kai $2^p-2$, dalosi iš $p^2$, yra 1093. Tokiam skaičiui rasti reikia nepaprastos kantrybės: čia tenka susidurti su tikrų tikriausiais pirminiais skaičiais-milžinais. Vifericho tyrimus tęsė Mirimanovas; jis įrodė štai ką: jeigu lygtis, kurios laipsnio rodiklis $p$ — pirminis skaičius, turi sprendinį, tai ir reiškinys

$$P(3)=\frac{3^p-3}{p}$$

turi būti dalus iš $p$. Vandiveras išplėtė šią taisyklę (šiek tiek apribojęs) — įrodė, kad turi būti dalus iš $p$ analogiškas reiškinys $P(5)$, o Frobenijus tą patį įrodė reiškiniams $P(11)$, $P(17)$ ir kai kuriems kitiems. Tokiu būdu, rodiklių $p$, kurie galėtų atitikti I tipo sprendinius, ratas dar labiau susiaurėjo.

**12.** Diksonas įrodė, kad lygtys, kurių laipsnio rodikliai yra visi pirminiai skaičiai, mažesni kaip 7000, neturi I tipo sprendinių.

Pailiustruosime jo minčių eigą vienu paprastu pavyzdžiu. Beje, mums teks pasinaudoti papildomu teiginiu, kuris atlieka svarbų vaidmenį skaičių teorijoje; jis taip pat vadinamas Ferma teorema, o retkarčiais — gal būt, ir ne visai vykusiai —„mažąja Ferma teorema", kad skirtųsi nuo „didžiosios Ferma teoremos", kurią čia nagrinėjame ir kuri dar tebelaukia išsamaus įrodymo.

Sakykime, kad teigiamas sveikasis skaičius $n$ nedalus iš pirminio skaičiaus $p$; tuomet, dalydami iš $p$, gauname liekaną, didesnę už 0 ir mažesnę už $p$. Skaičių $2n$, $3n$, $4n$, ..., $(p-1)n$ taip pat nepadalysime iš $p$ be liekanos. Tvirtiname, kad liekanos, kurias gauname, tuos skaičius dalydami iš $p$, yra visos skirtingos. Iš tikrųjų, jeigu, dalydami $fn$ ir $gn$ (sakykime, $f>g$), gautume tą pačią liekaną, tai skirtumas $fn-gn=(f-g)n$ būtų dalus iš $p$. Bet tai neįmanoma, nes nei $n$, nei $f-g$ nedalūs iš $p$; jau patys skaičiai $f$ ir $g$ mažesni už $p$, o jų skirtumas juo labiau mažesnis už $p$. Bet tai reiškia, kad, dalydami iš $p$ skaičius $n$, $2n$, $3n$, $4n$, ..., $(p-1)n$, gausime visas galimas liekanas: 1, 2, ..., $(p-1)$ (liekanas surašėme didėjimo tvarka). O tai, savo ruožtu, reiškia, kad, dalydami iš $p$ sandaugą $n\cdot 2n\cdot 3n\cdot 4n\cdot \ldots \cdot(p-1)=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots\cdot(p-1)n^{p-1}$ ir sandaugą

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot(p-1),$$

gausime tą pačią liekaną. Tuo būdu, jų skirtumas

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot(p-1)(n^{p-1}-1)$$

dalus iš $p$. O kadangi sandauga

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot(p-1)$$

iš $p$ nedali, tai turi būti dalus antrasis daugiklis

$$n^{p-1}-1.$$

Kitaip sakant: *jeigu $n$ nedalus iš $p$, tai, dalijant iš $p$ reiškinį $n^{p-1}$, gaunama liekana* 1. Tai ir yra mažoji Ferma teorema.

76 pratimas. Sugalvokite skaitinių pavyzdžių, iliustruojančių mažąją Ferma teoremą.

**13.** Tarkime, kad kuriems nors trims skaičiams $a$, $b$ ir $c$, nedaliems iš $p$, teisinga Ferma lygybė

$$a^p+b^p=c^p.$$

Dar Ležandras išskyrė iš visų pirminių skaičių tokius, kad arba $q_2=2p+1$, arba $q_4=4p+1$, arba $q_8=8p+1$, arba $q_{16}=16p+1$ vėl yra pirminiai. Laikysi-

me, kad $q_2=2p+1$ — pirminis skaičius, ir toliau jį žymėsime $q$. Tuomet, reiškinį $a^{q-1}=a^{2p}$ dalydami iš $q$, gausime liekaną 0 arba $+1$. Kokią iš to galime padaryti išvadą apie skaičių $a^p$? Šį skaičių dalydami iš $q$, taip pat gausime liekaną arba 0 (kitaip sakant, $a^p$ dalus iš $q$), arba $+1$, arba — čia galimas dar trečias atvejis — tokią liekaną, kuri nelygi $+1$, bet kurios kvadratas lygus $+1$. Jeigu sakysime, kad liekana gali būti ir neigiama, tiktai absoliutiniu didumu mažesnė už $p$, tai trečiuoju atveju turėsime liekaną $-1$.

Tas tris liekanas galėtume gauti, dalydami $b^p$ iš $q$ ir $c^p$ iš $q$. Dabar išsiaiškinkime, kokios gali būti liekanų kombinacijos. Iš viso čia galimi tik 6 atvejai (nes $a$ ir $b$ visiškai „lygiateisiai").

| Jei dalydami $a^p$, gauname liekaną | o $b^p$ — liekaną | tai, dalydami $c^p$, gauname liekaną |
|---|---|---|
| 1) $+1$ | $+1$ | $+2$ |
| 2) $+1$ | $-1$ | 0 |
| 3) $+1$ | 0 | $+1$ |
| 4) $-1$ | $-1$ | $-2$ |
| 5) $-1$ | 0 | $-1$ |
| 6) $-0$ | 0 | 0 |

1) ir 4) atvejus atmetame, nes, dalydami $c^p$ iš $q$, gauname liekanas, su kuriomis negalime susidurti. Be to, neįskaitome taip pat ir 6) atvejo, nes $a$, $b$ ir $c$ laikome tarpusavyje pirminiais. Vadinasi, galimi tik 2), 3) ir 5) atvejai, t. y. *Ferma lygties sprendiniai gali būti tik tokie trys skaičiai, kurių vienas dalus iš* $q=2p+1$.

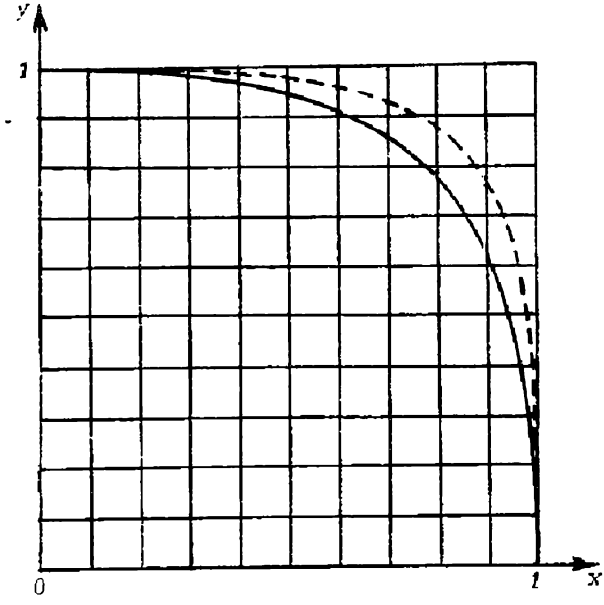
77 pratimas. Išaiškinkite, ar būtų teisinga taip pat samprotauti apie Pitagoro skaičių trejetus, ir padarykite išvadą iš to samprotavimo.

Jeigu pabandytume išplėsti gautąją išvadą ir kitiems pirminiams $q_{2k}$ pavidalo skaičiams, tai, kaip jau įsitikinome iš bandymo su skaičiumi $q_2$, skaičiai $x$, $y$, $z$ turėtų būti išskaidomi į labai didelį skaičių daugiklių. Kitaip sakant (esant I tipo sprendiniams), ne tik rodikliai, bet ir laipsnio pagrindai turėtų būti be galo dideli.

Kodėl apie tai užsiminėme? — norėdami įspėti tuos, kurie tikisi paneigti Ferma teoremą vien skaičiavimo keliu, bandydami rasti jai prieštaraujantį pavyzdį!

Taip pat reikia perspėti skaitytoją, kad iš to, kas pasakyta, nepadarytų kitos klaidingos išvados. Aišku,

būtų labai gerai, jeigu pavyktų įrodyti, kad bet kuriam pirminiam skaičiui $p$ galima rasti b e g a l o d a u g $q_2{}^k$ pavidalo pirminių skaičių, iš kurių dalosi bent vienas trejeto $a$, $b$, $c$ skaičius. Tuomet bent vienas iš tų skaičių turėtų be galo daug pirminių daugiklių ir negalėtų būti baigtinis! Tačiau D i k s o n a s įrodė, kad yra priešingai: kiekvieną pirminį skaičių $p$ atitinka tik baigtinis skaičius pirminių skaičių $q_2{}^k$, taigi ir šiuo keliu nepavyks įrodyti, jog I tipo sprendinių nėra.




73 pav.

**14.** Prieš atsisveikindami su Ferma teorema, tarsime keletą žodžių apie jos geometrinį turinį.

Grįškime prie septintojo paragrafo devinto punkto. Padaliję abi Ferma lygties $x^n+y^n=z^n$ puses iš $z^n$, galime išreikšti Ferma teoremą truputį kitoniškai: *lygtis*

$$X^n+Y^n=1 \qquad (\alpha)$$

*neturi sprendinio racionaliųjų (teigiamų) skaičių aibėje.*

73 brėžinyje matome kreives, kurios vaizduoja funkcijas

$$Y=\sqrt[n]{1-X^n}, \qquad (\beta)$$

kai $n=3$ ir $n=4$ (apsiribota tik kreivių dalimis, telpančiomis pirmajame kvadrante). Kai $n=2$, gausime papras-

čiausią vienetinio spindulio apskritimą (žr. § 8, 9 p.), o kai $n=5$, $n=6$ ir t. t., kreivė vis labiau ir labiau „glausis" prie vienetinio kvadrato kraštinių (ką reiškia šie žodžiai, kiekvienam aišku). Kokią geometrinę prasmę turi teiginys, kad lygtis ($\alpha$) neturi racionaliųjų sprendinių? Štai kokią: kreivės ($\beta$) (atvejį, kai $n=2$, čia praleidžiame) neina nė per vieną tašką, kurio koordinatės — racionalieji skaičiai, išskyrus taškus (1; 0) ir (0; 1),— jos išsisuka, aplenkdamos visus plokštumos taškus su racionaliomis koordinatėmis, neužkliudydamos nė vieno tokio taško. Tai iš tiesų įdomus faktas, išplaukiantis iš didžiosios Ferma teoremos, jeigu tik ji teisinga.

# TURINYS

Rusiškojo leidimo redaktoriaus žodis ..... 3
Pirmojo leidimo pratarmė ..... 4
Šeštojo leidimo pratarmė ..... 4

§ 1. Iš Pitagoro teoremos istorijos ..... 5
§ 2. Pitagoro teoremos įrodymas suskaidymo metodu ..... 13
§ 3. Pitagoro teorema Euklido sistemoje ..... 34
§ 4. Pitagoro teorema ir mokslas apie panašumą ..... 43
§ 5. Skaičiavimai, remiantis Pitagoro lygybe ..... 57
§ 6. Funkcinės priklausomybės ..... 64
§ 7. Pitagoro skaičiai ..... 76
§ 8. Ferma teorema ..... 92

Вальтер ЛИТЦМАН

**ТЕОРЕМА ПИФАГОРА**

*На литовском языке*

Перевод с русского издания 1960 г.
Перевела
*Н. ЖИЧКЕНЕ*

Издательство «Минтис» Лит. ССР, Вильнюс,
1974 г.

V. LICMANAS

**PITAGORO TEOREMA**

Verté
*N. ŽIČKIENĖ*

Redaktorė
*A. Šidarkevičienė*

Viršelio dailininkas
*A. Vitkauskas*

Tech. redaktorė
*D. Andriukonienė*

Korektorė
*A. Šulgaitė*

Duota rinkti 1973.XI.27. Pasirašyta spaudai 1974.IV.15. Popierius spaudos Nr. 1, form. 84×108$^{1}/_{32}$ — 5,67 sp. l., 5,74 l. l. Tiražas 10 000 egz. Kaina Rb. 0.21
Leidykla „Mintis", Vilnius, Sierakausko g. 15
Spausdino K. Požėlos spaustuvė Kaune, Gedimino 10.
Už̃s. Nr. 1682